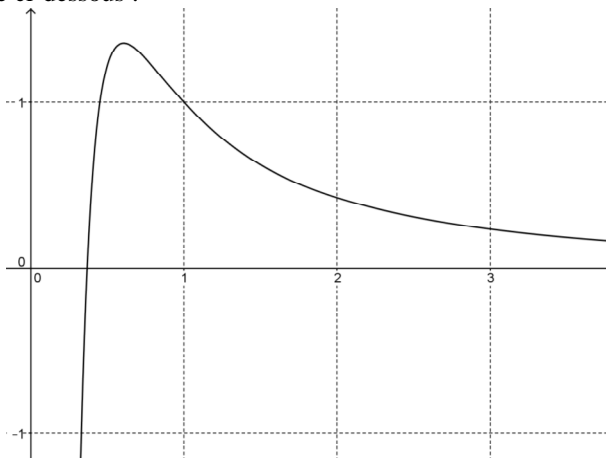


Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C .

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3. a. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln x}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n .

c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

CORRECTION

1. a. $f(x) = \frac{1}{x^2} (1 + \ln x)$ or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe C admet pour asymptote la droite d'équation $x = 0$ et en $+\infty$, la droite d'équation $y = 0$.

2. a. Soit $\begin{cases} u(x) = 1 + \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x^2 & v'(x) = 2x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\text{donc } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln x)}{x^4} \text{ donc pour tout réel } x \text{ appartenant à l'intervalle }]0; +\infty[, f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

b. Sur $]0; +\infty[: -1 - 2 \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -1 > 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-0.5}$.

$f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0; e^{-0.5}[$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[e^{-0.5}; +\infty[$.

c. $\ln e^{-0.5} = -0,5$ donc $1 + \ln e^{-0.5} = 0,5$ et $(e^{-0.5})^2 = e^{-1}$ donc $f(e^{-0.5}) = \frac{e}{2}$

x	0	$e^{-0.5}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

3. a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, de coordonnées $(e^{-1}; 0)$

b. f est strictement décroissante sur $[e^{-1}; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[e^{-1}; +\infty[$

f est strictement croissante sur $]0; e^{-0.5}[$ et $f(e^{-1}) = 0$ donc :

sur $]0; e^{-1}[$, $f(x) < 0$

$f(e^{-1}) = 0$

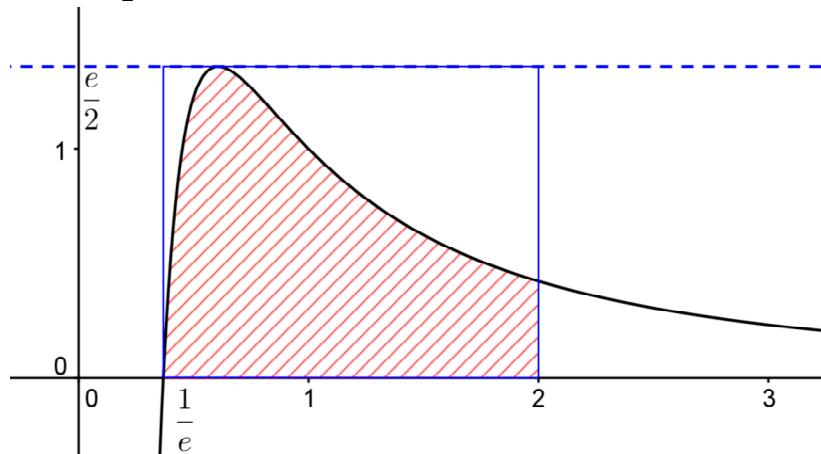
sur $]e^{-1}; +\infty[$, $f(x) > 0$

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a. I_2 est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 2$ (aire hachurée). Cette aire est inférieure à celle du rectangle bleu.

La longueur de ce rectangle est $2 - \frac{1}{e}$, sa largeur est égale au maximum de f donc à $\frac{e}{2}$ donc $I_2 \leq \frac{e}{2} \times \left(2 - \frac{1}{e}\right)$ soit $I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.

Une aire est positive donc $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.



b. La fonction f est positive sur $]e^{-1}; +\infty[$, donc $I_n = \int_{e^{-1}}^n f(x) dx$

$$I_n = F(n) - F(e^{-1}) = \frac{-2 - \ln n}{n} - \frac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}}$$

$$\frac{-2 - \ln e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{-2 - (-1)}{e^{-1}} = -e \text{ donc } I_n = \frac{-2 - \ln n}{n} + e$$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e$

L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est égale à e .