Sommaire

2011 3
Amérique du Nord mai 2011 3
Antilles Guyane juin 2011 4
Asie Juin 2011 5
Centres étrangers Juin 2011 6
Métropole Juin 2011 7
Polynésie juin 2011 8
Pondichéry avril 2011 9
2010 10
Amérique du Nord juin 2010 10
Liban juin 2010 11
Polynésie juin 2010 12
Pondichéry avril 2010 13
2009 14
Antilles-Guyane juin 2009 14
Asie juin 2009 15
Centres étrangers juin 2009 16
La Réunion juin 2009 17
Liban juin 2009 18
Métropole juin 2009 19
Métropole & La Réunion septembre 2009 20
Nouvelle-Calédonie novembre 2009 21
2008 22
Amérique du Nord mai 2008 22
Antilles-Guyane septembre 2008 23
Antilles-Guyane juin 2008 24
Asie juin 2008 25
La Réunion juin 2008 27
Liban juin 2008 27
Métropole & La Réunion septembre 2008 29
Nouvelle-Calédonie mars 2008 30
Polynésie juin 2008 31
2007 32
Liban juin 2007 32
Métropole & La Réunion septembre 2007 33
Nouvelle-Calédonie novembre 2007 34
Nouvelle-Calédonie mars 2007 35
Polynésie juin 2007 36
2006 37
Amérique du Sud novembre 2006 37
Centres étrangers juin 2006 38
France septembre 2006 39
2005 40
France septembre 2005 40
2004 41
2003 41
France métropolitaine juin 2003 41
2002 42
France métropolitaine juin 2002 42
Amérique du Nord Juin 2001 43
Amérique du Nord Juin 2002 44
Amérique du Nord Juin 1999 45
Amérique du Sud Novembre 2002 46
Centres étrangers I Juin 2001 47
Centres étrangers I Juin 1999 48
France métropolitaine juin 2001 49

France métropolitaine juin 2004 50
France métropolitaine juin 1999 51
France métropolitaine septembre 2002 52
France métropolitaine septembre 2003 53
Pondichéry avril 2002 54
Pondichéry avril 2001 55
Pondichéry avril 1999 56

2011

Amérique du Nord mai 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1$ (modulo p) ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?

5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3$ (modulo p) et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2$ (modulo p).

b. En déduire que $6\,u_{p-2} \equiv 0$ (modulo p).

c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

Antilles Guyane juin 2011

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$.

On note C l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble C et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					
Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

Asie Juin 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives : $\Gamma : z = x\,y$ et $C : x^2 + z^2 = 1$.

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C

a. Démontrer que les coordonnées $(x ; y ; z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que : $x^2 (1 + y^2) = 1$.

b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 2$.

b. Vérifier que : $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$

c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geq 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Centres étrangers Juin 2011

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute justification complète sera valorisée.

Question 1

On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.

Affirmation : Les seuls couples solutions de (E) sont les couples :

$$(22k - 2\ ;\ -4k + 1),$$

avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2

On considère l'entier $N = 11^{2012}$.

Affirmation : L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3

On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 1 + \mathrm{i}$, $b = 3\,\mathrm{i}$, $c = 1 - 2\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Affirmation : Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4

On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives : $a = 1 + \mathrm{i}$; $b = 2 - \mathrm{i}$.

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}\right)$.

Affirmation : La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la surface S dont une équation est : $z = 4xy$.

Affirmation : La section de la surface S par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

Métropole Juin 2011

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs vérifiant $a\,u + b\,v = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient a, b, c des entiers relatifs.

Si a divise le produit $b\,c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0$ $[p]$ et $a \equiv 0$ $[q]$, alors $a \equiv 0$ $[pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 9 & [17] \\ n \equiv 3 & [5] \end{cases}$.

1. Recherche d'un élément de S .

On désigne par $(u\,;\,v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17\,u + 5\,v = 1$.

a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;\,v)$.

b. On pose $n_0 = 3 \times 17\,u + 9 \times 5\,v$.

Démontrer que n_0 appartient à S .

c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à S .

2. Caractérisation des éléments de S .

a. Soit n un entier relatif appartenant à S .

Démontrer que $n - n_0 \equiv 0$ $[85]$.

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85\,k$ où k est un entier relatif.

3. Application

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.

Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.

Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-elle de jetons ?

Polynésie juin 2011

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p,

alors $a^{p-1} \equiv 1$ (modulo p).

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 1$et, pour tout entier naturel n ,$u_{n+1} = 10\,u_n + 21$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$3\,u_n = 10^{n+1} - 7.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) *par certains nombres premiers.*

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3\,u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo11).

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. a. Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1$(modulo17).

b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Pondichéry avril 2011
Partie A

On considère, dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, la surface S d'équation : $z = (x - y)^2$.

1. On note E_1 l'intersection de S avec le plan P_1 d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de E_1.

2. On note E_2 l'intersection de S avec le plan P_2 d'équation $x = 1$.
Déterminer la nature de E_2.

Partie B

On considère, dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, la surface S' d'équation : $z = x\,y$.

1. On note E_3 l'intersection de S' avec le plan P_1 d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de E_3.

2. On note E_4 l'intersection de S' avec le plan P_3 d'équation $z = 1$.
Déterminer la nature de E_4.

Partie C

On note E_5 l'intersection de S et de S'.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à E_5 dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point O(0 ; 0 ; 0).
On suppose qu'il existe un point M appartenant à E_5 et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.

2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.

a. Montrer que les entiers x, y et z vérifient $x^2 - 3\,x\,y + y^2 = 0$.
En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x_0^2 - 3\,x'\,y' + y'^2 = 0$.

b. Montrer que x' divise y_0^2, puis que x' divise y_0.

c. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3\,y' + y'^2 = 0$.

d. Conclure.

2010

Amérique du Nord juin 2010

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$.

1. Vérifier que le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\,z$.

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n. Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $OM_{n+4} = 4\,OM_n$ et que $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

c. Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.

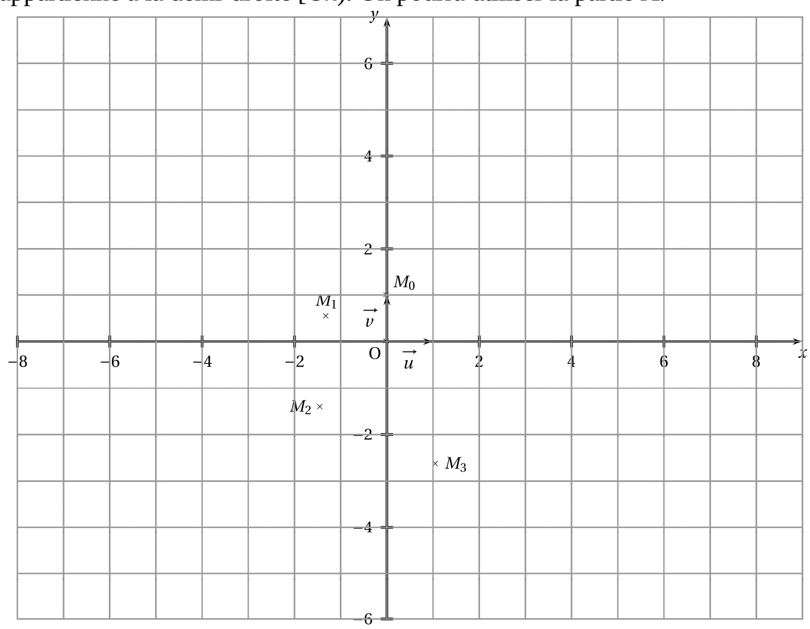
3. Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

a. Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_p}\right)$.

b. Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite [Ox). On pourra utiliser la partie A.



Liban juin 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $2 - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note I le milieu du segment [AB].

Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i) z - 1 - 2 i$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3 x - 5 y = 2$.

Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5 k - 1 ; 3 k - 1)$ où k est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0$ modulo 3, où $(x ; y)$ est un couple d'entiers relatifs.

Proposition 3 : « Il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k $(2 \leq k \leq n)$, le nombre $n ! + k$ n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E′) : $x^2 - 52 x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.

Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E′). »

Polynésie juin 2010

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leq 4$.

Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m > 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.

d. Pour $m > 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Pondichéry avril 2010

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs, tels que $a^2 = b^3$.

Soit (a, b) un tel couple et d = PGCD(a, b). On note u et v les entiers tels que $a = d\,u$ et $b = d\,v$.

1. Montrer que $u^2 = d\,v^3$.
2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$
3. Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs.

Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

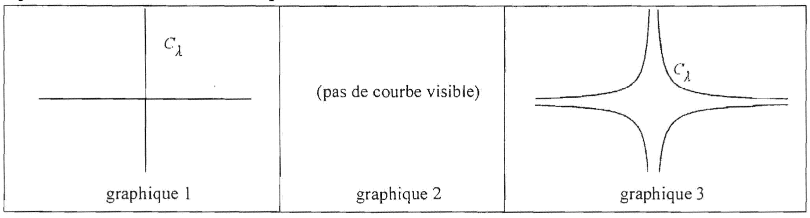
Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère 1a surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ, on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.

Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.



2. *a*. Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.

Déterminer le nombre de points de C_{2010} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

2009

Antilles-Guyane juin 2009

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}.$$

On note A le point d'affixe 2 i .

Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. **Affirmation :** $1\,991^{2\,009} \equiv 2\ (7)$.

3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $n\,a \equiv n\,b\ (p)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

E est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note S la section de E par le plan d'équation $y = 3$.

Affirmation : S est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

P est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Affirmation : O le seul point d'intersection de P avec le plan (yOz) à coordonnées entières.

Asie juin 2009

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme N = 1 + 17 x = 5 + 13 y où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation 17 x − 13 y = 4.

c. Résoudre l'équation 17 x − 13 y = 4 où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que N = 18 + 221 k.

e. Démontrer l'équivalence entre N ≡ 18 (221) et $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1$ (17) ?

b. Existe-t-il un entier naturel ℓ tel que $10^{\ell} \equiv 18$ (221) ?

Centres étrangers juin 2009

1. On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geq 0$ et $y \geq 0$;

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées

L'espace est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on désigne par P le plan d'équation $3x + 2y = 29$.

a. Démontrer que P est parallèle à l'axe (O z) de vecteur directeur $\vec{k}$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan P avec les axes (O x) et (O y) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan P avec les trois plans de coordonnées.

d. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans P et (x O y), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. Étude d'une surface

S est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les figures suivantes représentent les intersections de S avec certains plans de l'espace.

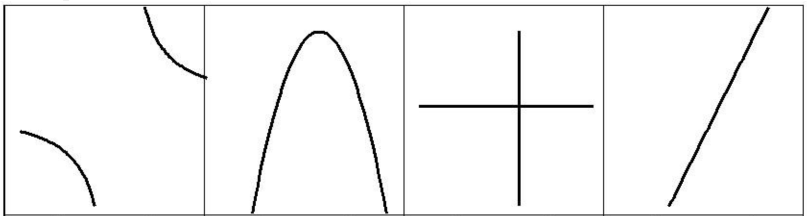


figure n° 1 — figure n° 2 — figure n° 3 — figure n° 4

a. S_1 désigne la section de la surface S par le plan (x O y). Une des figures données représente S_1 , laquelle ?

b. S_2 désigne la section de S par le plan R d'équation $z = 1$. Une des figures données représente S_2, laquelle ?

c. S_3 désigne la section de S par le plan d'équation $y = 8$. Une des figures données représente S_3, laquelle ?

d. S_4 désigne la section de S par le plan P d'équation $3x + 2y = 29$ de la question 2.

Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et P dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation $3x + 2y = 29$.

La Réunion juin 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z = -\frac{1}{4}$.

On note $d(M, P)$ la distance d'un point M au plan P.

Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ qui vérifient $d(M, P) = MF$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2. ***a.*** Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z = 2$?

b. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x = 0$?

Représenter cette intersection dans le repère $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

a. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

b. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

Liban juin 2009

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \bmod 10\,000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \bmod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. ***a.*** Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que :

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. ***a.*** Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \bmod 625$.

b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \bmod 625$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

Métropole juin 2009

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. ***a.*** Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ,\ y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8\,x - 5\,y = 3$.

b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8\,p + 1$ et $m = 5\,q + 4$.

Montrer que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. Soit n un nombre entier naturel.

a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3\,k} \equiv 1$ (modulo 7).

Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $\mathrm{N} = a \times 10^{3} + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $\mathrm{N} = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^{3} \equiv -1$ (modulo 7).

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Métropole & La Réunion septembre 2009

1. (a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

(b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

(c) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

(a) Montrer que d_n divise 2^n.

(b) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

(c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.

En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.

Nouvelle-Calédonie novembre 2009

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple (u ; v) d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.

En déduire une solution particulière (x_0 ; y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).

Démontrer que si (x ; y) est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7. En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

2008

Amérique du Nord mai 2008

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (x O y).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; – 3) et (– 1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (x O y).

4. *a.* On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

4. *b.* M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et ppcm (a ; b) = 440, c'est-à-dire tels que (a ; b) soit solution du système (1) : $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}$.

Montrer que si (a ; b) est solution de (1) alors pgcd (a ; b) est égal à 1 ou 5.

Conclure.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Antilles-Guyane septembre 2008

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\ \begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases} \text{, où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \text{ et } z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .
2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives :

$$a_0 = 2\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \text{ et et } b_0 = 4\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}.$$

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences : $A_{n+1} = f(A_n)$ et $B_{n+1} = g(B_n)$.

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles $OA_n A_{n+1}$?

b. En déduire la nature du polygone $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

3. *a*. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}})$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0 B_2 B_4 B_6 B_8$.

4. *a*. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

Antilles-Guyane juin 2008

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;-3)$ est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25$ (modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre $\mathbb{Z}$.

La lettre L est donc codée par la lettre $\mathbb{Z}$.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a : $11x \equiv j$ (modulo 26) équivaut à $x \equiv 19j$ (modulo 26).

b. En déduire un procédé de décodage.

c. Décoder la lettre W.

Asie juin 2008

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. On note $R_{a,\,b}$ ce réseau.

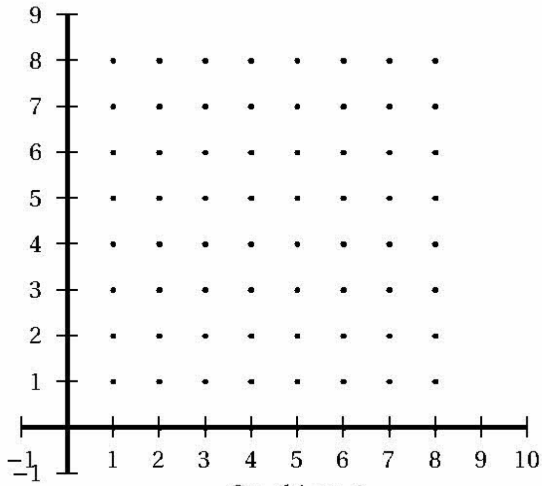
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur l'annexe.

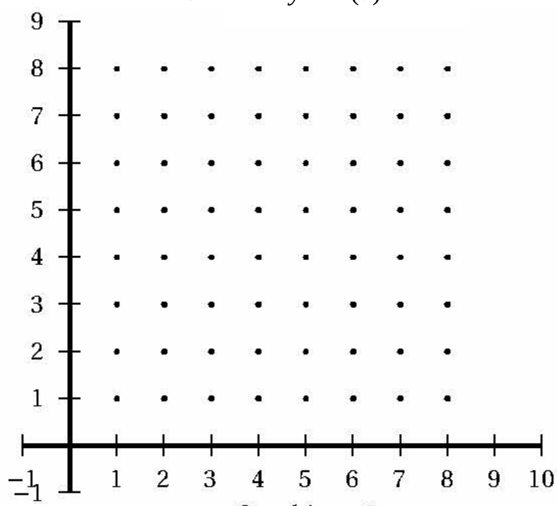
Représenter graphiquement les points $M(x\,;\,y)$ du réseau $R_{8,\,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2\ (3)$ et $y \equiv 1\ (3)$



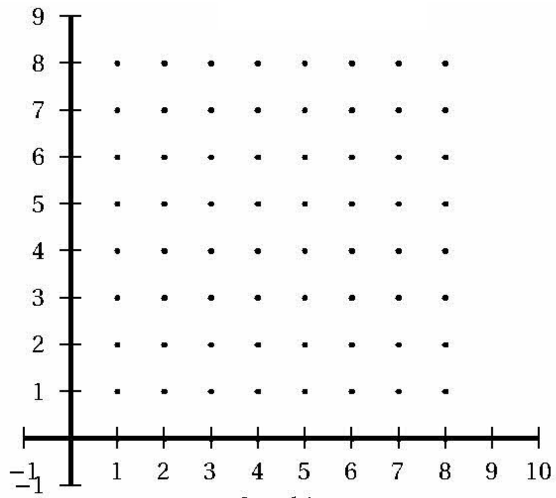
Graphique 1

2. $x + y \equiv 1\ (3)$



Graphique 2

3. $x \equiv y\ (3)$



Graphique 3

B - Résolution d'une équation
On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x ; y)$ pour laquelle le point $M(x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau $R_{a,b}$, avec O(0 ; 0) et A(a ; b).

1. Démontrer que les points du segment [OA] sont caractérisés par les conditions : $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $a y = b x$.

2. Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau.
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$.)

La Réunion juin 2008

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 2\,i$ et $z_C = i$.

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)\bar{z} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,i$

b. En déduire l'affixe de C′, symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (D) d'équation $4x + 3y = 1$.

d. Vérifier que le point C′ appartient à (D).

2. a. Démontrer que les droites (D) et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (D) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$.

b. Déterminer les points de (D) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Liban juin 2008

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on considère la similitude directe f d'écriture complexe :

$$z \to \frac{3}{2}(1 - i)\,z + 4 - 2\,i$$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2\,i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul:

Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

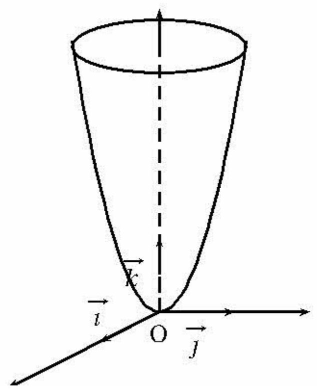
Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14 ; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal. $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La surface Σ ci-dessous a pour équation $z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole »

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel :

Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leq a \leq b \leq 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,\mathrm{d}k$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a, b]$.

Métropole & La Réunion septembre 2008

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. *a*. Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M′ image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. *a*. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \, e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point An appartient à la demi droite $(O ; \vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point An appartient-il à la demi droite $(O ; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

Nouvelle-Calédonie mars 2008

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7$

$\overline{\beta\alpha7}^{12} = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711$ en base 10

1. ***a.*** Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$.

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0}^{12}$.

2. ***a.*** Démontrer que $N \equiv a_0$ (3). En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.

Confirmer avec son écriture en base 10.

3. ***a.*** Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0$ (11). En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.

Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

Polynésie juin 2008

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. »

2. Soit x un entier relatif.

Proposition 2 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5) . »

3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.

Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a + b$ est divisible par 7. »

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal. direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1 - i$ a pour écriture complexe $z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$. »

5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $(O ; \vec{u})$ et s_A la symétrie centrale de centre A.

Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

2007

Liban juin 2007

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\,\mathrm{i}\,z + 1$.

Proposition 1 : «Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \mathrm{i}\frac{2}{5}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,5)$ et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

Métropole & La Réunion septembre 2007

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que $a\,y \equiv 1$ (modulo 7).

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3\,x \equiv 5$ (modulo 7) équivaut à $x \equiv 4$ (modulo 7).

c. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation a $x \equiv 0$ (modulo 7) sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; ... ; p - 1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.

Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p).

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation a $x \equiv 1$ (modulo p).

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x\,y \equiv 0$ (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2\,x \equiv 1$ (modulo 31) et $3\,x \equiv 1$ (modulo 31).

À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$6\,x^2 - 5\,x + 1 \equiv 0 \text{ (modulo 31).}$$

Annexe :

a	1	2	3	4	5	6
y						6

Nouvelle-Calédonie novembre 2007

1. ***a.*** Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{4} par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $6^{40} \equiv 1$ [11] et que $6^{40} \equiv 1$ [5].

d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation (E′) $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E′).

d. Résoudre l'équation (E′).

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1$ [40].

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b$ [55] et si $a^{40} \equiv 1$ [55], alors $b^{33} \equiv a$ [55].

Nouvelle-Calédonie mars 2007

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(a\,n + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p.

Montrer, que si $5\,n + 2$ et $5\,p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5\,n - 26\,y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5\,x - 26\,y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

A. Donner une solution particulière de l'équation $5\,x - 26\,y = 2$.

B. Résoudre alors l'équation $5\,x - 26\,y = 2$.

C. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

Polynésie juin 2007

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), on considère les points A (1 ; 3 ; 2), B(4 ; 6 ; −4) et le cône (Γ) d'axe (O ; $\vec{k}$), de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (x O y) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q).

Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

- deux droites parallèles ;
- deux droites sécantes ;
- une parabole ;
- une hyperbole ;
- un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z). Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées (x ; y ; z) où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si$M$ est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2 \equiv 1$ modulo10.

c. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2006

Amérique du Sud novembre 2006

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b$ mod 7 lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b$ mod 7 et $c \equiv d$ mod 7 alors $a\,c \equiv b\,d$ mod 7.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b$ mod 7 alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ mod 7.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ mod 7.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1$ mod 7.

b. On appelle ordre de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ mod 7. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ mod 7.

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6$ mod 7.

Centres étrangers juin 2006

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^{n} - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ ».

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4n$ est congru à 1modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^{n} par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^{n} - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n > 1$ tel que $4^{n} \equiv 1 \bmod p$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^{n} \equiv 1 \bmod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^{b} \equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

a. Démontrer que $4^{r} \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.

b. Prouver l'équivalence : $4^{n} - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

c. En déduire que b divise $p - 1$.

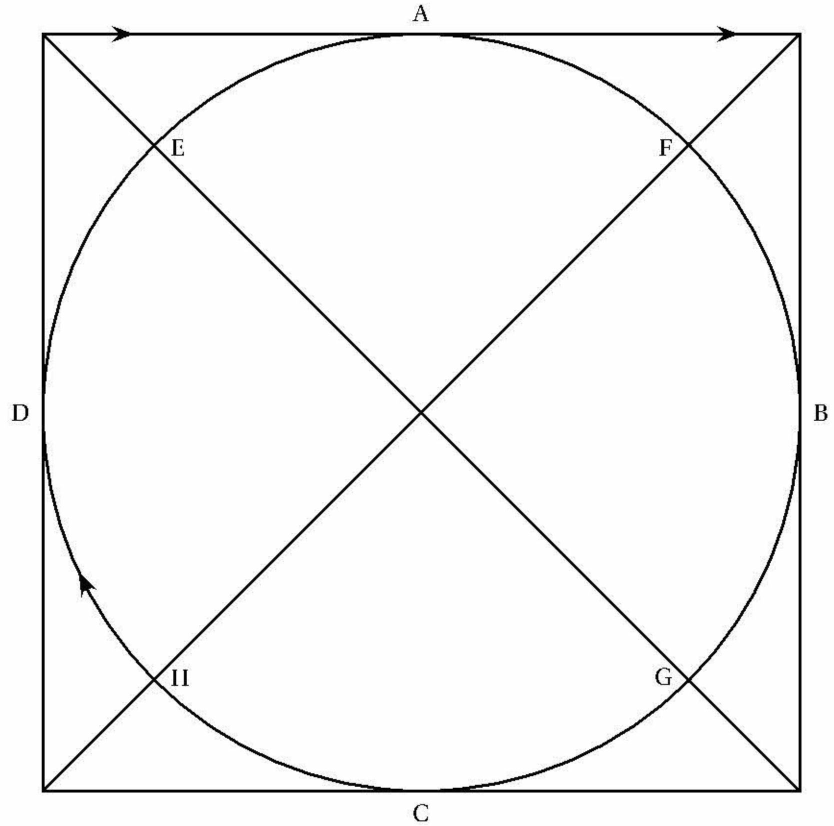
France septembre 2006

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$, où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma ci-dessous. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.



Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon.

À l'instant t , on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

2005

France septembre 2005

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \text{ (modulo 6)}.$$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6).

D : les solutions vérifient $x \equiv 2$ (modulo 6) ou $x \equiv 5$ (modulo 6).

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x\,;y) = (34\,k - 7\,;5 - 24\,k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x\,;y) = (17\,k - 7\,;5 - 12\,k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :

$$(x\,;y) = (-7\,k\,;5\,k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors : A : $n \equiv 4$ (modulo 17) et $p \equiv 0$ (modulo 17).

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4$ (modulo 17).

D : $p \equiv 1$ (modulo 17).

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}\,a}{1 - \mathrm{i}}$ B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$.

C : $a - z = \mathrm{i}\,(b - z)$. D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

2004

2003

France métropolitaine juin 2003

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.

Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.

Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

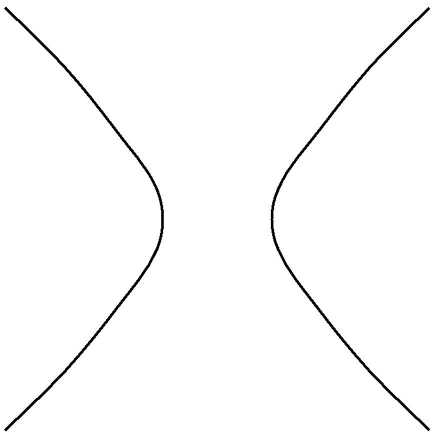


Figure 1

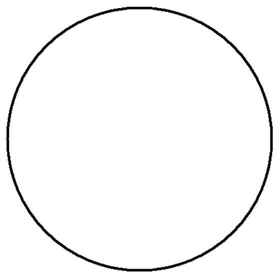


Figure 2

3. a. Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution,

b. Montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. a. Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :

si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

2002

France métropolitaine juin 2002

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Amérique du Nord Juin 2001

1. Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x+31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution (x_0, y_0) de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. Application :

Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication : on remarquera que le point M *de coordonnées* (x, y) *appartient à la droite* D *si et seulement si le couple* $(x, -y)$ *vérifie l'équation* (*E*).

Amérique du Nord Juin 2002

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. *a*) Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.

b) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. *a*) Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b) Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.

a) Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

b) Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Etude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile. On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que : $n = 2000 + 4p$ et $n = 2002 + 11q$.

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.

Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).

2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2024 + 44k$ où k est un entier relatif.

3. A l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).

NB : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 31 ; 37.

Amérique du Nord Juin 1999

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit E = {l ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.

Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de $a\ b$ par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a. l'entier (n – l) ! + l est-il pair ?

b. l'entier (n – l) ! + l est-il divisible par un entier naturel pair ?

2. Prouver que l'entier (15 – 1) ! + l n'est pas divisible par l5.

3. l'entier (11 – l) ! + l est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p entier naturel non premier ($p \geq 2$) .

1. Prouver que p admet un diviseur q (l < q < p) qui divise (p – 1) !

2. L'entier q divise-t-il l'entier (p – 1) ! + 1 ?

3. L'entier p divise-t-il l'entier (p – 1) ! + 1 ?

Amérique du Sud Novembre 2002

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111...11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1).

On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2001: expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$). Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$. Démontrer l'égalité $a_m - a_n = a_{m-n} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10.

Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

Centres étrangers I Juin 2001

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.

Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. *a*. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b. En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_2).

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1) .

d. Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.

3. *a*. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1?

b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (l'année 2000 était bissextile).

c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Centres étrangers I Juin 1999

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. *a*. Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solution de l'équation : $48x + 35y = 1$.

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres.)

b. Déduire de *a*. tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (48 ; 35 ; 24) et le point A de coordonnées (– 11 ; 35 ; – 13) .

a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que : $\vec{u} . \overrightarrow{AM} = 0$.

b. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.

Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [– 100 ; 1 00] .

En déduire les coordonnées du point de (D) , à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

France métropolitaine juin 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z\, e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

- M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et
- pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.

On appelle z_n l'affixe de M_n .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p, montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n - p)$ est multiple de 12.

4. *a*. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4, 9) est solution, résoudre l'équation (E) .

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

France métropolitaine juin 2004

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. *a.* Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = d\,k$.

Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m' et n' par $m = d\,m'$ et $n = d\,n'$.

En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $m\,u - n\,v = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs.

Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\,\mathrm{a}^{\mathrm{d}} = \mathrm{a}^{\mathrm{d}} - 1$

Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

France métropolitaine juin 1999

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, \; b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1\. *a*. Calculer a_1, , b_1, c_1 , a_2 , b_2 , c_2 , a_3, b_3, et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à l00 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Montrer que PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2). En déduire que b_n et c_n, sont premiers entre eux.

2\. On considère l'équation (1) $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3; en déduire une solution particulière de (1) .

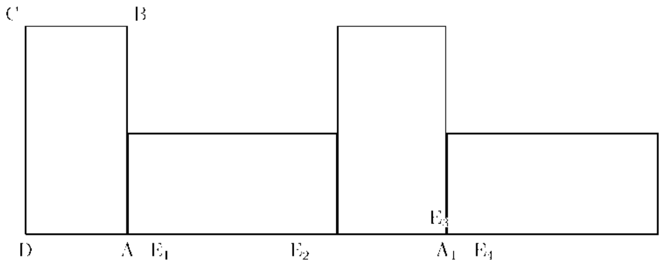
c. Résoudre l'équation (1)

Liste des nombres premiers inférieurs à 100

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

France métropolitaine septembre 2002

On considère un rectangle direct ABCD vérifiant : AB = 10 cm et AD = 5 cm.



1) Faire une figure: construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2) *a*) Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(A) = N$ et $r'(B) = P$. Déterminer l'angle de r'.

b) Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3) On considéré les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la translation de vecteur $\overrightarrow{DM}$. Sur la demi-droite [DA), on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k \geq 1}$ vérifiant, en cm, $DA_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, en cm, $DE_n = 6{,}55\,n$.

a) Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b) On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.

Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.

Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

France métropolitaine septembre 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. *a*. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123\,u + 2003\,v = 1$

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123\,k_0 \equiv 1 \quad [2003]$

c. Montrer que pour tout entier relatif x, $123\,x \equiv 456\ [2003]$ si et seulement si $x \equiv 456\,k_0 \quad [2003]$

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

$$123\,x \equiv 456 \quad [2003]$$

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$1 \leq n \leq 2002 \quad \text{et} \quad 123\,n \equiv 456 \quad [2003]$$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a. Déterminer : PGCD (a , 2003).

En déduire qu'il existe un entier m tel que : $a\,m \equiv$ [2003].

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :

$$0 \leq x \leq 2002 \text{ et } a\,x \equiv b\ [2003].$$

Pondichéry avril 2002

1 ° Calculer le PGCD de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 4\,u_n$.

2 ° Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u .

3 ° *a*) Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 4\,u_n + 1.$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

4° Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

Pondichéry avril 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11\,n - 24\,m = 1\ .$$

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1) .

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1) .

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1) , montrer que l'on peut écrire
$(10^{11\,n} - 1) - 10\,(10^{24\,n} - 1) = 9$.

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11\,n} - 1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - 1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que $(10^{11\,n} - 1)\,\mathrm{N} - (10^{24\,n} - 1)\,\mathrm{M} = 9$.

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

Pondichéry avril 1999

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier.

Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour p.g.c.d. 1999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$,

(E) $n^2 - S\,n + 11\,994 = 0$ où S est un entier naturel.

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?

Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.

En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier? Préciser le raisonnement employé.

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.