Polynésie septembre 2017

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Un parc d'attraction propose à son public un tout nouveau grand huit. Pour des raisons de sécurité, son accès n'est autorisé qu'aux personnes dont la taille est supérieure ou égale à 1,40 *m* et dont l'âge est compris entre 10 et 70 ans.
Des études statistiques sont menées pour évaluer l'affluence et la satisfaction des visiteurs pour ce manège.
On arrondira, si nécessaire, les probabilités à 10^{-4}.

1. *a.* La taille en centimètres d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisée par la variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 165 et d'écart-type 20. Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait la taille requise pour accéder à ce grand huit ?

b. L'âge d'un visiteur du parc, choisi au hasard, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 17. Quelle est la probabilité qu'un visiteur ait l'âge requis pour accéder à ce grand huit ?

c. Les études menées permettent d'établir que 89 % des visiteurs ont la taille exigée, 87 % ont l'âge requis mais 8 % n'ont ni la taille, ni l'âge obligatoires. Quelle est alors la proportion des visiteurs vérifiant les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction ?

2. Un sondage est réalisé à la sortie du grand huit et révèle que 25 % des personnes ont attendu moins de 30 min avant de pouvoir essayer le manège.
Parmi elles, 95 % sont satisfaites de l'attraction.
En revanche, 22 % des personnes ayant attendu plus de 30 min ne sont pas satisfaites de l'attraction.
On choisit au hasard un visiteur à sa sortie du grand huit.
On note A l'évènement « le visiteur a attendu plus de 30 min » et S l'évènement « le visiteur est satisfait de l'attraction ».

a. Montrer que la probabilité qu'un visiteur soit satisfait de l'attraction vaut 0,822 5.

b. Le directeur rencontre un visiteur insatisfait. Quelle est la probabilité que ce visiteur ait attendu moins de 30 min ?

3. Le directeur est soucieux de savoir si le temps d'attente, plus important les jours de grande affluence, remet en cause le taux de satisfaction des visiteurs. Pour cela, on interroge 200 personnes au hasard à la sortie du grand huit.
Parmi elles, 46 se disent insatisfaites.
Le directeur peut-il être rassuré ?

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.
On note N(t) le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.
Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que $N(t) = N_0\, e^{a\,t}$.

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.
En déduire la valeur du paramètre a.

2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t > 0$, $N(t) = N_0\, e^{0,05\,t}$.
La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules.
Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer.
Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.
En l'absence de suivi médical, au bout de combien de temps la tumeur pourrait-elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie.
Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en µmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $c(t) = \dfrac{D}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80}t}\right)$

où :

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. Détermination de la clairance

Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 µmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament :
elle est égale à 6,8 µmol.L^{-1}.

a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation $112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8\,k = 0$.

b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]\,0 ; +\infty\,[$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit

a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ.
Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 µmol. L^{-1}.
En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de 5,85 L.h^{-1}.

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b,

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

On considère la droite D d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$ alors $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$.

2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z ; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M.

Montrer que le point M appartient à la droite D si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}\text{, avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite D le plus proche de l'origine O du repère.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}3 \\ u_{n+1} = 0{,}9\,u_n\,(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, un modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1- u_n$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 1].

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9\,u_n$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année avant laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
Variables :     u est un réel
                n est un entier naturel
Traitement :    u prend la valeur 0,3
                n prend la valeur 0
                Tant que ... faire :
                   |
                   |
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher ...
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0{,}032 \\ v_{n+1} = 1{,}06\,v_n\,(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n > 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1{,}06\,\ell\,(1-\ell).$$

3. La population de tortues est -elle encore en voie d'extinction ?

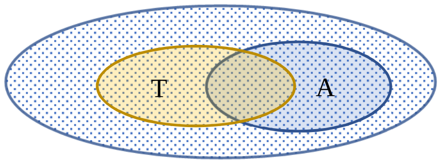
CORRECTION

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

1. *a.* A la calculette : $P(T \geq 140) = 0{,}8944$

b. $P(10 \leq X \leq 70) = 0{,}8710$

c. Soit les événements : T : « le visiteur a la taille exigée », A : « le visiteur a l'âge requis ».



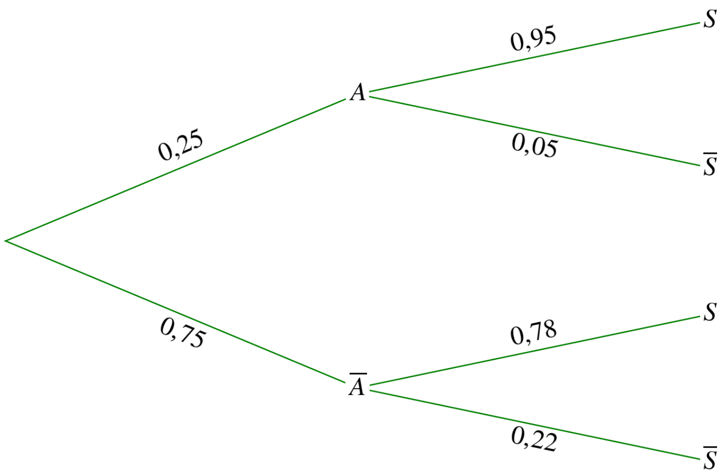
$P(T) = 0{,}89$ et $P(A) = 0{,}87$, $P(\overline{T} \cap \overline{A}) = 0{,}08$

$P(T \cup A) = 1 - P(\overline{T \cup A}) = 1 - P(\overline{T} \cap \overline{A}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

$P(T \cup A) = P(T) + P(A) - P(T \cap A)$ donc $0{,}92 = 0{,}89 + 0{,}87 - P(T \cap A)$

$P(T \cap A) = 1{,}76 - 0{,}92 = 0{,}84$ donc 84 % des visiteurs vérifient les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction.

2.



a. $P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap \overline{A}) = 0{,}25 \times 0{,}95 + 0{,}78 \times 0{,}75 = 0{,}822\,5$.

b. $P_{\overline{S}}(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{A})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0{,}75 \times 0{,}22}{0{,}8225} = 0{,}2006$

3. $n = 200$, $p = 0{,}822\,5$ donc $n\,p > 5$ et $n\,(1 - p) > 5$ donc on peut utiliser un intervalle de fluctuation au niveau de confiance 95 %.

$$I = \left[0{,}1775 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}1775 \times (1 - 0{,}1775)}}{200}\,;\,0{,}8225 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}1775 \times (1 - 0{,}1775)}}{200}\right]$$

$I = [0{,}1245\,;\,0{,}2305]$

On interroge 200 personnes, parmi elles, 46 se disent insatisfaites donc la proportion de personnes insatisfaites est $\dfrac{46}{200} = 0{,}23$.

$0{,}23 \in I$ donc avec un niveau de confiance 95 %, le directeur peut être rassuré.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. A $t = 0$, le nombre de cellules de la tumeur est N_0, il double en 14 semaines donc $N(14) = 2\,N_0$

$e^{14\,a} = 2$ soit $14\,a = \ln 2$ donc $a = \dfrac{\ln 2}{14}$ soit $a \approx 0{,}0495$

2. Soit t le moment où la tumeur redevient détectable, $N(t) = 10^9$,

Soit t_0 le moment de l'opération $N(t_0) = 10^4$ donc $\begin{cases} N(t) = N_0\,e^{0{,}05\,t} = 10^9 \\ N(t_0) = N_0\,e^{0{,}05\,t_0} = 10^4 \end{cases}$

donc $\dfrac{e^{0{,}05\,t}}{e^{0{,}05\,t_0}} = \dfrac{10^9}{10^4}$ soit $e^{0{,}05\,(t - t_0)} = 10^5$ soit $0{,}05\,(t - t_0) = 5 \ln 10 \Leftrightarrow t - t_0 = \dfrac{5 \ln 10}{0{,}05} = 100 \ln 10$ soit 230 semaines après l'opération, la tumeur pourrait être à nouveau détectée.

Partie B

1. Détermination de la clairance

a. Au bout de 6 heures, la concentration du médicament dans l'organisme est $c(6) = \dfrac{112}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80} \times 6}\right) = 6{,}8$

soit $112\left(1-e^{-\frac{3}{40}k}\right)-6,8\,k=0$

b. Soit $f(x)=112\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)-6,8\,x$.

f est définie continue dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x)=112\times\dfrac{3}{40}\,e^{-\frac{3}{40}x}-6,8=8,4\,e^{-\frac{3}{40}x}-6,8$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{40}x}\geq\dfrac{6,8}{8,4}$ et $x\geq 0\Leftrightarrow -\dfrac{3}{40}x\geq\ln\dfrac{17}{21}$ et $x\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq -\dfrac{40\ln\left(\frac{17}{21}\right)}{3}$

Soit $\alpha=-\dfrac{40\ln\left(\frac{17}{21}\right)}{3}$

f est strictement croissante sur $[0\,;\alpha]$ et $f(0)=0$ donc pour tout x de $]0\,;\alpha]$, $f(x)>0$

f est strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ et $f(\alpha)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ donc pour tout x de $[\alpha\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ donc sur $]0\,;+\infty[$.

c. $f(5,84)>0$ et $f(5,85)<0$ donc $5,84<\alpha<5,85$.

f est positive sur $[0\,;\alpha]$ et négative sur $[\alpha\,;+\infty[$

$f(x)=112\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)-6,8\,x$, $f(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{112}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{80}\times 6}\right)\geq 6,8$ donc la concentration du médicament dans l'organisme est inférieure à 6,8 µmol. L^{-1} tant que $k\in[0\,;\alpha]$.

Pour une clairance de 5,85 litres par heure et un débit de 112 µmol.h−1 , au bout de 6 heures, la concentration du médicament est de 6,8 µmol.L−1

2. Réglage du débit

a. $c(t)=\dfrac{D}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{80}\times t}\right)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{k}{80}t}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}c(t)=\dfrac{D}{k}$.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite $\ell=\dfrac{D}{k}$

cette concentration limite doit être de 16 µmol. L^{-1} donc $\dfrac{D}{k}\leq 16$ or la clairance du patient est de 5,85 L.h^{-1} donc $k=5,85$

donc $D\leq 16\times 5,85$ soit $D\leq 93,6$ µmol.h^{-1}

EXERCICE 3 3 points Commun à tous les candidats

1. Si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right[$ alors $-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}$ soit $-\dfrac{\pi}{2}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$.

2. Le point M appartient à la droite D si et seulement si $y=-x+2$.

Soit ρ et θ les coordonnées polaires de M alors $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$,

La droite ne passe pas par O donc OM $\neq 0$ donc $\rho>0$

θ appartient à un intervalle de longueur 2π par exemple $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right[$ donc $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$ et $\rho>0$.

$M\in D\Leftrightarrow y=-x+2\Leftrightarrow\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2\Leftrightarrow\rho(\cos\theta+\sin\theta)=2$

$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$ donc $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=2\Leftrightarrow\rho\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\Leftrightarrow\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

Le point M de coordonnées polaires $(\rho\,;\theta)$ appartient à la droite D si et seulement si $\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$, avec $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right[$ et $\rho>0$.

3. $OM=\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

Le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right[$ donc $-\dfrac{\pi}{2}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ est maximal si $\theta-\dfrac{\pi}{4}=0$ soit si $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

ρ est alors minimal et est égal à $\sqrt{2}$, ceci correspond au point H de coordonnées $(1\,;1)$

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. 2001 = 2000 + 1 donc le nombre de tortues en 2001 est $u_1 = 0{,}9 \times 0{,}3\,(1 - 0{,}3)\,) = 0{,}189$ milliers de tortues soit 189 tortues.
2002 = 2000 + 2 donc le nombre de tortues en 2001 est $u_1 = 0{,}9 \times 0{,}189\,(1 - 0{,}1{,}89)\,) = 0{,}1379511$ milliers de tortues soit 138 tortues.

2. *a.* $0 \leq 1 - u_n \leq 1$ donc $0 \leq 0{,}9\,u_n\,(1 - u_n) \leq 0{,}9\,u_n$ soit pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9\,u_n$.

b. Initialisation : $u_0 = 0{,}3$ donc $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^0$, la propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons pour tout entier n, que si $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^n$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$.

$0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9\,u_n$

$0{,}9\,u_n \leq 0{,}9 \times 0{,}3 \times 0{,}9^n$ en utilisant l'hypothèse de récurrence et en multipliant lest termes de l'inégalité par 0,3

On a donc : $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9\,u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^n$.

c. $0 \leq 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La population de tortues est promise à l'extinction.

3. 30 tortues correspondent à 0,03 milliers de tortues

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3
	n prend la valeur 0
	Tant que $u > 0{,}03$ faire :
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0{,}9\,u\,(1 - u)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Partie B

1.

Année	n	v_n	Population de tortues
2010	0	0,032	32
2011	1	0,03283456	33
2012	2	0,033661839	34

2. La suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 1{,}06\,v_n\,(1 - v_n)$,
Soit $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie sur R par $f(x) = 1{,}06\,x\,(1 - x)$, f est continue sur R donc en passant à la limite : $\ell = 1{,}06\,\ell\,(1 - \ell)$.

3. $\ell = 1{,}06\,\ell\,(1 - \ell)$ donc soit $\ell = 0$ soit $1{,}06\,(1 - \ell) = 1$ donc $\ell = \dfrac{0{,}06}{1{,}06}$ soit environ 0,056

La suite (v_n) est croissante et $v_0 > 0$ donc $\ell > 0$ donc la population de tortues tendra vers 56 tortues et ne sera plus en voie d'extinction.