Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i \; ; z_B = -1 + i\sqrt{3} \; ; z_C = -1 - 3i.$$

On note D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

On note E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

1. *a.* Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 2 cm, placer les points A et B et C.

c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. *a.* Construire les points D et E. Calculer leurs affixes z_D et z_E

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et que OE = AD.

3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.
Soient A, B, C, D et E les points- d'affixes respectives non nulles z_A, z_B, z_C, z_D et z_E tels que :

- le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$;
- le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$;
- Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$z_B = i z_A \; ; z_D = i z_C \; ; z_E = i z_A + z_C$$

b. Montrer que : $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i$.

c. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right)$ puis conclure.

CORRECTION

1. *a.* $|z_A| = 2$ et $z_A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ donc $z_A = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$|z_b| = 2$ et $z_B = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ donc $z_B = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b.

c. $OA^2 = |z_A|^2 = 4$
$OB^2 = |z_B|^2 = 4$ donc OA = OB , le triangle OAB est isocèle.
$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})|^2$
$AB^2 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 8$
$AB^2 = OA^2 + OB^2$ donc le triangle OAB est rectangle isocèle.

Autre solution :

La rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ soit $z' = i z$

$i z_A = i(\sqrt{3} + i) = -1 + i\sqrt{3} = z_B$ donc B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ donc le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. *a.* D l'image du point C par la rotation de centre O d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ donc $z_D = i z_C$ donc $z_D = 3 - i$.

E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OC}$ soit $z_E - z_B = z_C$ donc $z_E = z_B + z_C$ soit $z_E = = -2 + i(\sqrt{3} - 3)$.

b. $\overrightarrow{AD}$ a pour affixe $z_D - z_A = 3 - i - (\sqrt{3} + i)$ soit $3 - \sqrt{3} - 2i$
$\overrightarrow{OE}$ a pour affixe $-2 + i(\sqrt{3} - 3)$.
$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times (3 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3) \times (-2) = 0$
$\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

$OE^2 = |-2 + i(\sqrt{3} - 3)|^2 = 4 + (\sqrt{3} - 3)^2$

$AD^2 = (3 - \sqrt{3})^2 + 4$ donc $AD^2 = OE^2$ soit $AD = OE$

3. *a.* le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

La rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ soit $z' = i\,z$ donc $z_B = i\,z_A$.

le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}$; donc D est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ donc $z_D = i\,z_C$;

Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CE}$,

donc $z_E - z_C = z_B$ soit $z_E = z_B + z_C$

or $z_B = i\,z_A$ donc $z_E = i\,z_A + z_C$

b. $z_D - z_A = i\,z_C - z_A = i\,(z_C + i\,z_A) = i\,z_E$ donc $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i$.

c. $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right| = \dfrac{AD}{OE}$

$\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right) = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AD})$ donc $\dfrac{AD}{OE} = 1$ et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et $AD = OE$