Un pion se déplace sur le damier suivant constitué de 9 cases ; au départ il est sur la case 0.

– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4

Les déplacements du pion sont déterminés par le lancer d'une pièce de monnaie (bien équilibrée).
Si la pièce tombe du coté face le pion se déplace d'une case vers la droite sinon il se déplace d'une case vers la gauche.
Si le pion est sur la case 4 ou – 4, il *y* reste.
Un trajet est une succession de 4 déplacements.
On se propose de déterminer la probabilité de l'événement « le pion est revenu à sa position de départ à l'issue du trajet » à l'aide de l'outil matriciel.
On peut assimiler la situation précédente à une marche aléatoire sur un graphe dont les sommets représentent la position du pion :

0, 1, 2, 3, 4, – 1, – 2, – 3, – 4.

a. Justifier que la matrice de transition associée à cette marche aléatoire est :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer $(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \times A^4$. En déduire la réponse à la question posée

c. La séquence RanInt(0,1) renvoie 0 ou 1.

Quel est le rôle de l'algorithme ci-dessous ? On suppose que RanInt a donnée successivement 0, 1, 1, 1.
Qu'on obtient on à l'affichage ?

```
Initialisation
S = 0
Traitement
Pour K de 1 jusqu'à 4
    | S prend la valeur S + 2 × RanInt(0,1) – 1
    | Afficher S
FinPour
```

CORRECTION

Un pion se déplace sur le damier suivant constitué de 9 cases ; au départ il est sur la case 0.

– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4

a. Si le pion est en case 4 ou – 4, il ne bouge pas de la case.

Si $-3 \leq i \leq 3$, le pion placé sur la case i peut aller avec une probabilité $\frac{1}{2}$ soit vers la case $i + 1$ (la pièce tombe sur face) soit vers la case $i - 1$ (la pièce tombe sur pile) donc :

	probabilité que la case soit occupée après un lancer								
Après 1 lancer / case initiale	0	1	2	3	4	– 1	– 2	– 3	– 4
0		0,5				0,5			
1	0,5		0,5						
2		0,5		0,5					
3			0,5		0,5				
4					1				
– 1	0,5						0,5		
– 2						0,5		0,5	
– 3							0,5		0,5
– 4									1

La matrice de transition associée à cette marche aléatoire est donc :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. $(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) \times A^4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$

Le pion est revenu à sa position de départ à l'issue du trajet avec une probabilité $\frac{3}{8}$.

c. La séquence RanInt(0,1) renvoie 0 ou 1, donc 2 × RanInt(0,1) – 1 est égal soit à 1 soit à – 1
L'algorithme simule une marche en 4 étapes à partir de 0 soit en se déplaçant de 1 vers la droite soit de 1 vers la gauche

K	RanInt(0,1)	2 × RanInt(0,1) – 1	S	Affichage
			0	
1	0	– 1	0 – 1 = – 1	– 1
2	1	1	– 1 + 1 = 0	0
3	1	1	0 + 1 = 1	1
4	1	1	1 + 1 = 2	2

Affichage : 2.