

ENONCE

Polynésie Septembre 2001

Pour tout naturel $n > 1$ on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .
2. Démontrer que pour tout naturel $n > 1$ on a : $I_{n+1} - I_n = -\frac{2}{2^{n+1} (n+1)!}$
3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n > 1$ on a : $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n$
4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$

On pourra déterminer A en majorant la fonction : $t \rightarrow (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0; 1]$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de : $u_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}$.

CORRECTION

$$1. \quad I_1 = \frac{1}{2^2} \int_0^1 (1-t) e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$\text{donc } 4 I_1 = \int_0^1 (1-t) e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$\text{Soit } u'(t) = e^{\frac{t}{2}} \text{ alors } u(t) = 2 e^{\frac{t}{2}}$$

$$v(t) = 1-t \text{ alors } v'(t) = -1$$

$$\text{donc } 4 I_1 = \left[2(1-t) e^{\frac{t}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 -2 e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$4 I_1 = -2 + 2 \int_0^1 e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$4 I_1 = -2 + 2 \left[2 e^{\frac{t}{2}} \right]_0^1$$

$$4 I_1 = -2 + 2(2 e^{\frac{1}{2}} - 2)$$

$$4 I_1 = -2 + 4 e^{\frac{1}{2}} - 4 = -6 + 4 \sqrt{e}$$

$$\text{donc } I_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{e}$$

2. On refait une intégration par parties :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{(n+1)+1} (n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{\frac{t}{2}} dt \text{ donc } 2^{n+2} (n+1)! I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$\text{Soit } u'(t) = e^{\frac{t}{2}} \text{ alors } u(t) = 2 e^{\frac{t}{2}}$$

$$v(t) = (1-t)^{n+1} \text{ alors } v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$$

$$\text{donc } 2^{n+2} (n+1)! I_{n+1} = \left[2(1-t)^{n+1} e^{\frac{t}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 -2(n+1)(1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$2^{n+2} (n+1)! I_{n+1} = -2 + 2(n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$I_{n+1} = -\frac{2}{2^{n+1} (n+1)!} + \frac{2(n+1)}{2^{n+2} (n+1)!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$I_{n+1} = -\frac{2}{2^{n+1} (n+1)!} + \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$I_{n+1} = -\frac{2}{2^{n+1} (n+1)!} + I_n$$

$$3. \quad I_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{e} \Leftrightarrow \sqrt{e} = \frac{3}{2} + I_1 \Leftrightarrow \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + I_1 \Leftrightarrow \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + I_1$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$

Montrons que pour tout n de \mathbb{N} , la propriété est héréditaire :

$$\text{Si } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n \text{ montrons qu'alors : } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$\text{or } I_{n+1} = -\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_n \Leftrightarrow I_n = \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$\text{or } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n$$

$$\text{donc } \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_{n+1}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ donc est vraie pour tout n de \mathbb{N}^* .

$$4. \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ et la fonction } t \rightarrow e^{\frac{t}{2}} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}, \text{ donc } 0 \leq e^{\frac{t}{2}} \leq \sqrt{e}$$

$$0 \leq 1 - t \leq 1 \text{ donc } 0 \leq (1 - t)^n \leq 1$$

$$\text{donc } 0 \leq (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} \leq \sqrt{e}$$

$$\text{La fonction } t \rightarrow (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} \text{ est définie continue sur } [0 ; 1], 0 \leq 1 \text{ et } 0 \leq (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} \leq \sqrt{e}$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^1 (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} dt \leq \int_0^1 \sqrt{e} dt$$

$$\text{soit } 0 \leq \int_0^1 (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} dt \leq \sqrt{e}$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} dt \leq \frac{1}{2^{n+1} n!} \sqrt{e}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\sqrt{e}}{2} \text{ donc } A = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$2^n \cdot n! > n \text{ (car } 2^n > 1 \text{ et } n! > n) \text{ donc } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{e}}{2} = 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} = \sqrt{e} - I_n \Leftrightarrow u_n = \sqrt{e} - I_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{e}.$$