Amérique du Nord Juin 2003

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.

2. a. Vérifier que : $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
Tracer le cercle Γ_1.

3. a. Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

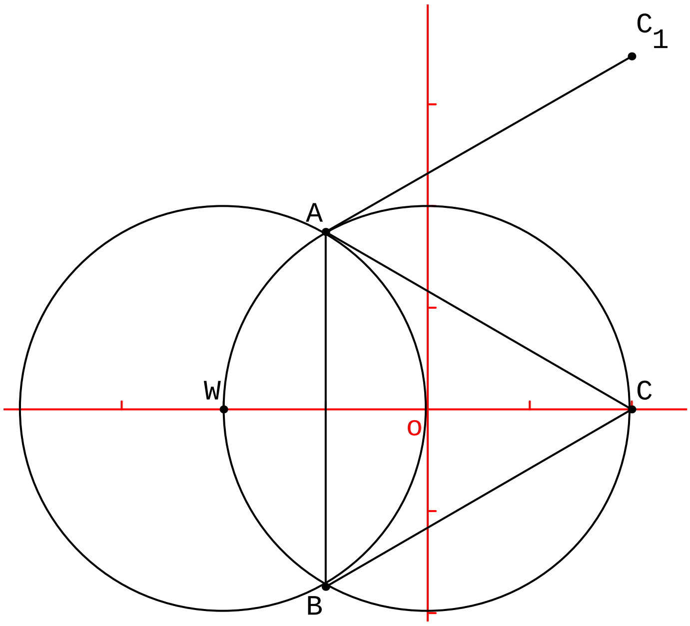
5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
On posera : $z' = a z + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b..

b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point r(C), image du point C par la rotation r ; en déduire que le point r(C) appartient un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

CORRECTION

1.



2. *a.* $z_B - z_C = -1 - i\sqrt{3} - 2 = -3 - i\sqrt{3}$

$z_A - z_C = -1 + i\sqrt{3} - 2 = -3 + i\sqrt{3}$

donc $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{(-3 - i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{9 - 3 + 6i\sqrt{3}}{9 + 3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

soit $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1$ et $\arg\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{\pi}{3}$ soit BC = AC et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in$ Z

Le triangle ABC est équilatéral direct.

c. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ donc Γ_1 est le cercle de centre O de rayon 2.

3. *a.* $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels donc $2(z + \bar{z}) + z\,\bar{z} = 0 \Leftrightarrow 4x + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \Omega M^2 = 4$ $\Leftrightarrow \Omega M = 2$

Γ_2 est le cercle de centre Ω d'affixe -2 de rayon 2.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

$\Omega A = |-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 2| = |1 + \mathrm{i}\sqrt{3}| = 2$ donc $A \in \Gamma_2$.

$\Omega B = |-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 2| = |1 - \mathrm{i}\sqrt{3}| = 2$ donc $B \in \Gamma_2$.

4. *a.* A est le centre de la rotation donc $r_1(A) = A$

Le triangle ABC est équilatéral direct donc l'image de B par r_1 est C

r_1 a pour expression complexe : $z' - z_A = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$

donc $c_1 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

$c_1 = \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

$c_1 = 2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{3}$

b. La rotation r_1 transforme le cercle de centre Ω de rayon 2 en le cercle de centre $r_1(\Omega)$ de même rayon

Ω est transformé par r_1 en Ω' tel que $\omega' = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(\omega - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$

donc $\Omega' = O$ et Γ_2 est transformé par r_1 en Γ_1.

5. *a.* Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

La rotation r transforme le cercle de centre Ω de rayon 2 en le cercle de centre $r_1(\Omega)$ de même rayon

donc $r_1(\Omega) = O$ soit $a\,\omega + b = 0$ donc $-2a + b = 0$ donc $z' = a(z + 2)$

b. $c' = a(c + 2) = 4a$

$|a| = 1$ donc $|c'| = 4$ donc $r(C)$ appartient au cercle de centre O de rayon 4

$c_1 = 2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{3}$ donc $|c_1|^2 = 4 + 4 \times 3 = 16$ donc $|c_1| = 4$ soit $OC_1 = 4$ donc Le cercle fixe passe par C_1.