Pondichéry mai 2018

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1; 4), (4 ; – 1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; – 2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; – 1).
Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.

3. *a.* Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (CD) est $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 \\ z = -4t + 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2. *a.* $BM^2 = (4t-4)^2 + 4^2 + (-4t+2)^2 = 32t^2 - 48t + 36 = 4(8t^2 - 12t + 9)$

La distance BM est minimale quand BM^2 l'est aussi or $8t^2 - 12t + 9 = 8\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{2}$.

La distance est minimale pour $t = \frac{3}{4}$ soit si M (3 ; 3 ; – 1)

b. $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD} = -1 \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. H est un point de la droite (CD), les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires donc (BH) est la hauteur issue de B du triangle BCD.

$BH^2 = (-1)^2 + 4^2 + (-1)^2 = 18$ donc $BH = 3\sqrt{2}$

$CD^2 = 4^2 + 0^2 + (-4)^2 = 32$ donc $CD = 4\sqrt{2}$

L'aire du triangle BCD est égale à $\frac{1}{2}$ BH × CD = $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12$ cm^2.

3. *a.* H ∈ (CD) donc (BH) est une droite du plan (BCD)

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}.\vec{n} = -1 \times 2 + 4 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$

$\overrightarrow{CD}.\vec{n} = 4 \times 2 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 0$ donc $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc de la forme $2x + y + 2z + d = 0$

$H \in$ (BCD) donc $2 \times 3 + 3 - 2 + d = 0$ soit $d = -7$

Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc $2x + y + 2z - 7 = 0$

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

Une représentation paramétrique de Δ est donc $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

d. Le point I appartient à la droite Δ donc a des coordonnées de la forme $(2t + 2 ; t + 1 ; 2t + 4)$

Le point I appartient au plan (BCD)

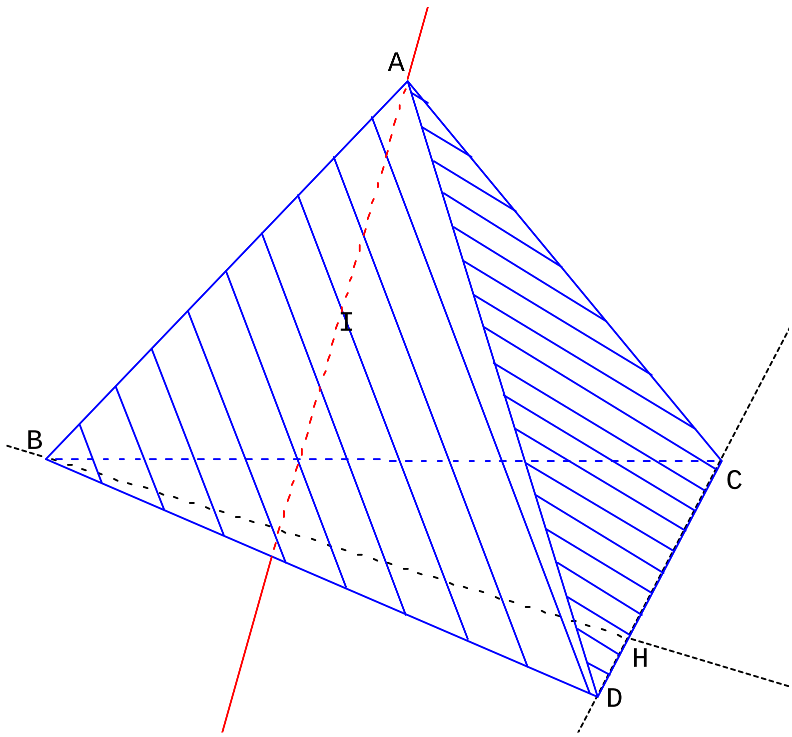
donc $2x + y + 2z - 7 = 0$

soit $2(2t + 2) + t + 1 + 2(2t + 4) - 7 = 0$

soit $9t + 6 = 0$ donc $t = \dfrac{-2}{3}$.

En remplaçant : le point I a pour coordonnées :

$\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{8}{3}\right)$.



4. $AI^2 = \left(\dfrac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{8}{3} - 4\right)^2 = 4$

donc $AI = 2$

$V = \dfrac{1}{3} A_{BCD} \times AI = \dfrac{1}{3} \times 12 \times 2 = 8 \text{ cm}^3$