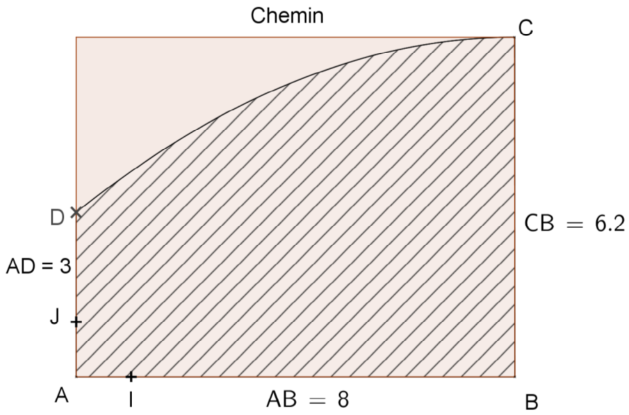
Deux frères ont reçu en héritage le terrain représenté ci-après.
Ils souhaitent se le partager. Afin d'avoir chacun un accès à la route, ils décident de le couper suivant une droite parallèle à (AD) et se demandent quelle position doit avoir cette droite pour qu'ils possèdent chacun la même surface de terrain.
On appelle respectivement I et J les points de [AB] et [AD] telle que AI = AJ = 1 m.
On considère que l'on peut modéliser la ligne courbe d'extrémités C et D (que l'on notera Γ) par la représentation graphique dans le repère orthonormé (A, I, J) d'une fonction polynôme du second degré définie sur [0 ; 8], la courbe de cette fonction étant tangente au chemin au point C.



1. On appelle f la fonction définie sur [0 ; 8] représentée par Γ. Comme f est une fonction polynôme du second degré, son expression est de la forme $f(x) = a x^2 + b x + c$, où a, b et c sont trois réels.

a. Avec les données de l'énoncé, montrer que les réels a, b et c vérifient le système d'équations suivant : $\begin{cases} c = 3 \\ 64a + 8b + c = 6,2 \\ 16a + b = 0 \end{cases}$

b. Résoudre le système précédent et montrer que, pour tout x de [0 ; 8]: $f(x) = -\frac{x^2}{20} + \frac{4}{5}x + 3$.

c. Calculer alors l'aire S du terrain, exprimée en m^2. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie à 10^{-2} près.

2. Soit m un réel appartenant à [0 ; 8].

a. Exprimer, en fonction de m, l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axes des ordonnées, et la droite d'équation $x = m$.

Soit g la fonction définie sur [0 ; 8] par : $g(x) = -\frac{1}{60}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + 3x$.

b. Déterminer $g'(x)$, étudier son signe et établir le tableau de variation g.

c. Justifier alors que l'équation $g(x) = \frac{308}{15}$ admet une unique solution x_0 dans [0 ; 8].

d. Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-3}.

3. Utiliser les résultats de la question 2., pour dire à quelle distance de A, arrondie au centimètre près, doit se faire le découpage du terrain.

CORRECTION

1. *a.* AD = 3 donc $f(0) = 3$ donc $c = 3$
BC = 6,2 donc $f(8) = 6,2$ donc $64a + 8b + c = 6,2$
$f'(x) = 2ax + b$, la courbe Γ est tangente au chemin en C donc $f'(8) = 0$ soit $16a + b = 0$.

Les réels a, b et c vérifient le système d'équations suivant : $\begin{cases} c = 3 \\ 64a + 8b + c = 6,2 \\ 16a + b = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} c = 3 \\ 64a + 8b + c = 6,2 \\ 16a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 64a + 8b + 3 = 6,2 \\ 16a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 64a + 8b = 3,2 \\ 16a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 8a + b = 0,4 \\ 16a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ -8a = 0,4 \\ 16a + b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = \frac{0,4}{-8} = -\frac{1}{20} \\ 16a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = -\frac{1}{20} \\ b = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \end{cases}$ donc pour tout x de [0 ; 8]: $f(x) = -\frac{x^2}{20} + \frac{4}{5}x + 3$.

c. La fonction f est positive sur [0 ; 8] donc $S = \int_0^8 f(x)\,dx$ (en unités d'aire).

$$S = \left[-\frac{1}{20}\times\frac{x^3}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{x^2}{2}+3x \right]_0^8$$

$$S = \left[-\frac{1}{60}x^3+\frac{2}{5}x^2+3x \right]_0^8 = -\frac{1}{60}\times 8^3+\frac{2}{5}\times 8^2+3\times 8$$

$S = \frac{616}{15}$ *u. a.* or une unité d'aire est égale à 1 m^2 donc $S \approx 41{,}07\ m^2$.

2\. *a.* $A_m = \int_0^m f(x)\,dx = -\frac{1}{60}m^3+\frac{2}{5}m^2+3m$

b. $g'(x) = -\frac{x^2}{20} + \frac{4}{5}x + 3 = \frac{1}{20}(-x^2 + 16x + 60)$

Cherchons les solutions de $-x^2 + 16x + 60 = 0$

$\Delta = 16^2 - 4 \times (-1) \times 60 = 496 = 16 \times 31$

$x_1 = 8 - 2\sqrt{31}$ et $x_2 = 8 + 2\sqrt{31}$

$x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ donc sur [0 ; 8], $g'(x) > 0$

x	0	8
$g'(x)$	+	
g	0 ↗	$\frac{616}{15}$

c. La fonction g est définie continue strictement croissante sur [0 ; 8], $g(0) = 0$ et $g(8) = \frac{616}{15}$, $\frac{308}{15}$ est compris entre 0 et $\frac{616}{15}$ donc l'équation $g(x) = \frac{308}{15}$ admet une unique solution x_0 dans [0 ; 8].

d. $g(20{,}533) < \frac{308}{15}$ et $g(20{,}534) > \frac{308}{15}$ donc $20{,}533 < x_0 < 20{,}534$

3\. $A_m = g(m)$ donc si $m = 20{,}53$ (à 10^{-2} près par excès) l'aire de la partie de plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axes des ordonnées, et la droite d'équation $x = m$ est la moitié de l'aire totale.
Il faut donc découper le terrain suivant une droite parallèle à (AD) en un point M de [AB] tel que AM = 20,53.