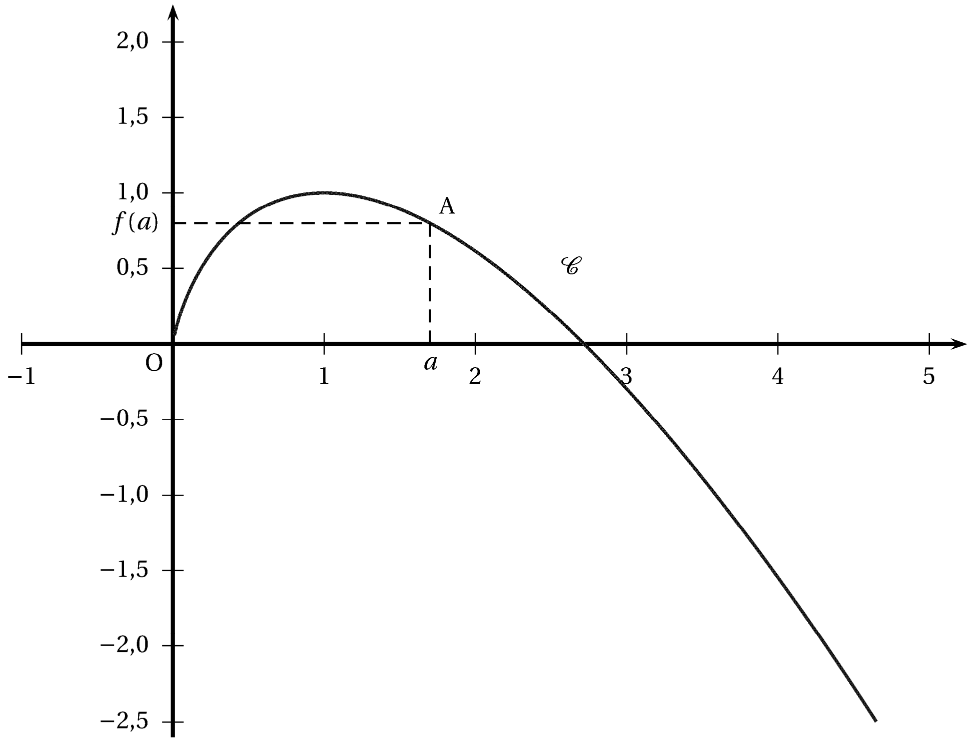
Métropole La Réunion septembre 2010

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x(1 - \ln x)$.

La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous.



Partie 1 : Étude de la fonction *f*

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe C d'abscisse a.

a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A′, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note A(a) la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \mathrm{e}$.

1. Justifier que $A(a) = \int_a^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$, en distinguant le cas $a < \mathrm{e}$ et le cas $a > \mathrm{e}$.

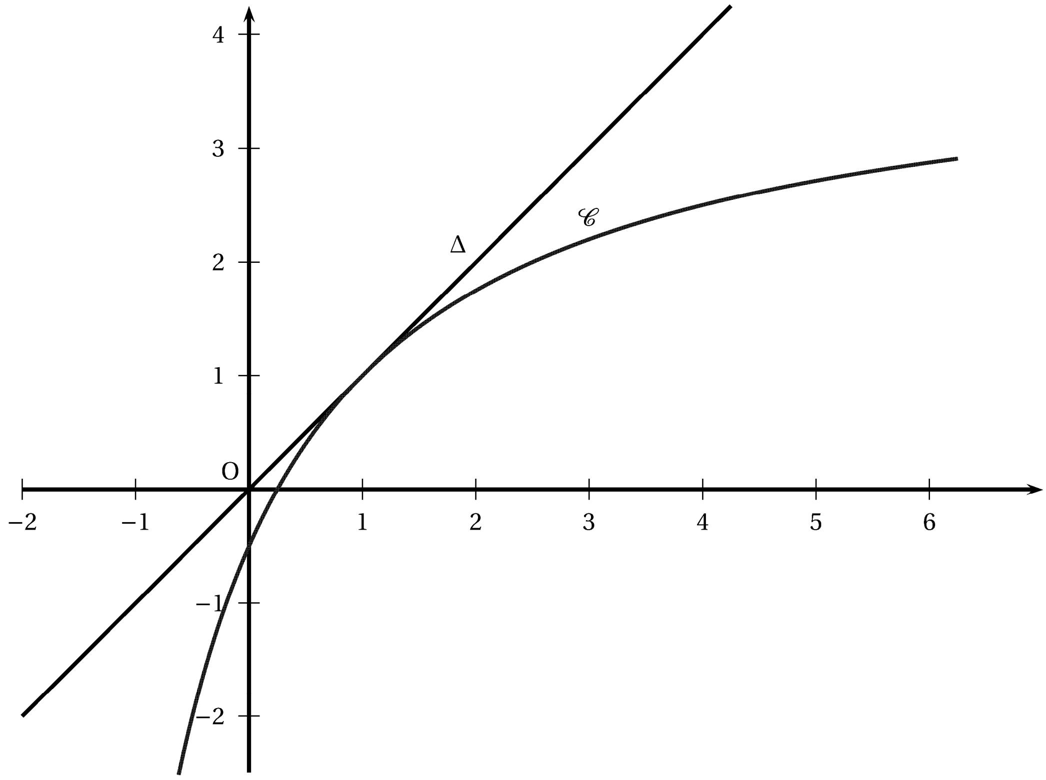
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer A(a) en fonction de a.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative C de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. *a.* Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. *a.* Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. *b*.

3. *Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de un en fonction de n.*

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis un en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit (P) le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

1. *a.* Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan (P) ? Justifier.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) et de la droite (D).

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t+1\,;2t\,;-t+2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} + 1)$.

Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC? Justifier.

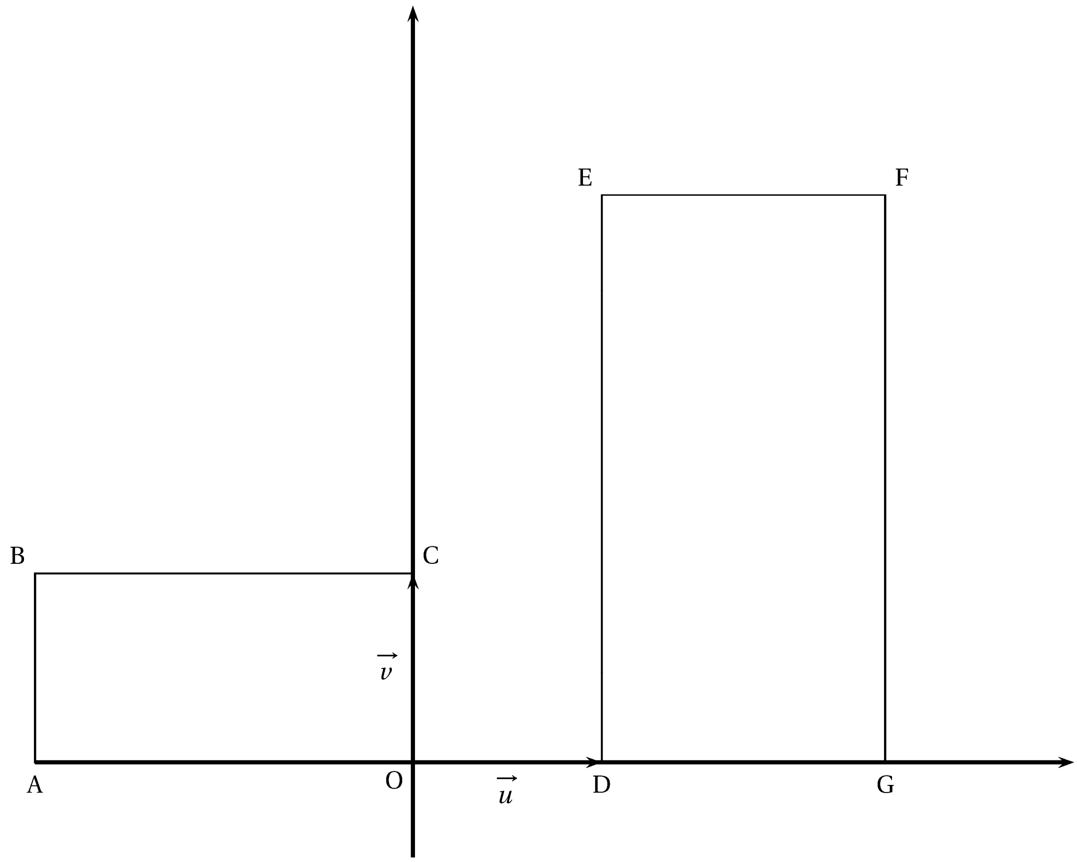
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou* d'*initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

EXERCICE 4 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = -2 + \mathrm{i}$, $z_C = \mathrm{i}$, $z_D = 1$, $z_E = 1 + 3\,\mathrm{i}$, $z_F = \dfrac{5}{2} + 3\,\mathrm{i}$, $z_G = \dfrac{5}{2}$.



1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}\,z + 1$.

b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\dfrac{2}{3}\,\mathrm{i}\,\overline{z} + \dfrac{5}{3}\,\mathrm{i}$.

a. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

b. On considère la similitude $g = s' \circ s$.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g .

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou* d'*initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans* l'*évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

CORRECTION

EXERCICE 1 Commun à tous les candidats

Partie 1 : Étude de la fonction *f*

1. $f(x) = x(1 - \ln x)$, or $x > 0$ donc $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$
donc sur $]\, 0 \,;\, e\,[$, $f(x) > 0$, de plus $f(e) = 0$ et sur $]\, e \,;\, +\infty\,[$, $f(x) \leq 0$

2. $f(x) = x(1 - \ln x) = x - x \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

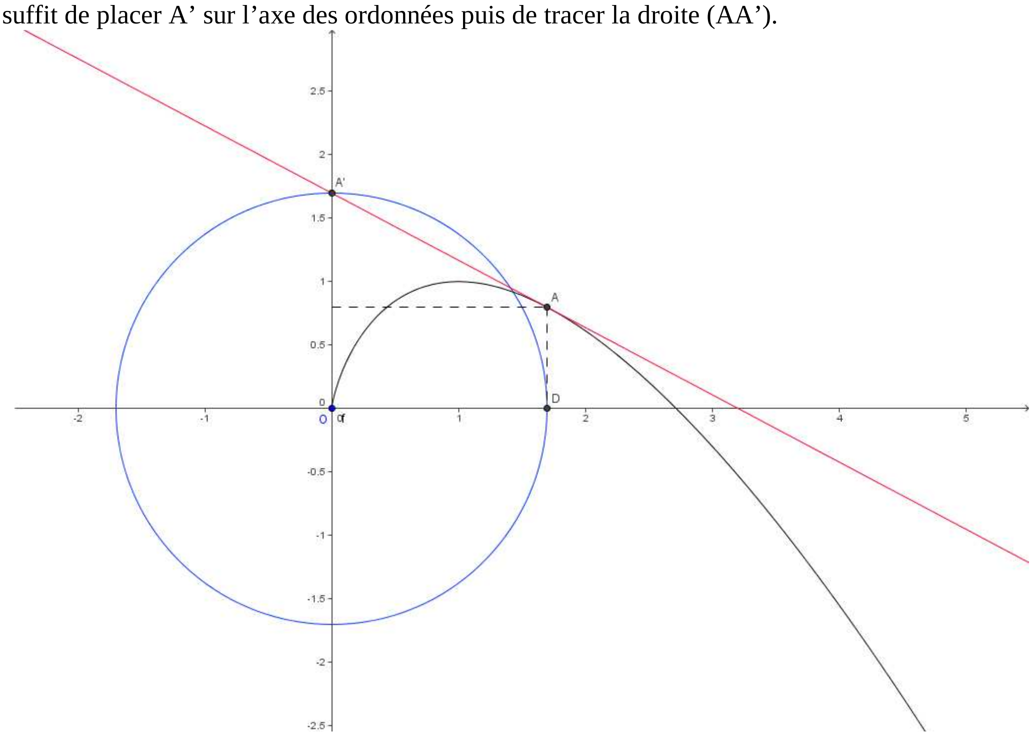
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3. Soit $u(x) = x$ et $v(x) = 1 - \ln x$ alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = 1 - \ln x + x\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. *a.* A a pour coordonnées $(a \,;\, a(1 - \ln a))$
(T_a) est la droite de coefficient directeur $f'(a) = -\ln a$ donc (T_a) a pour équation $y = -x \ln a + b$
$A \in (T_a)$ donc $a(1 - \ln a) = -a \ln a + b$ donc $b = a$ donc (T_a) a pour équation $y = -x \ln a + a$
A', point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées, a pour coordonnées $(0 \,;\, a)$.

b. A appartient à la tangente en A à la courbe. A' est le point de l'axe des ordonnées qui a pour ordonnée a.
Pour tracer (T_a) il suffit de placer A' sur l'axe des ordonnées puis de tracer la droite (AA').



Partie II : Un calcul d'aire

1. Si $0 < a < e$, la fonction f est positive sur $[\, a \,;\, e\,]$ et $a < e$ donc $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_a^e f(x)\,dx$,

Si $a > e$, la fonction f est négative sur $[\, e \,;\, a\,]$ et $a > e$ donc $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_e^a -f(x)\,dx = -\int_e^a f(x)\,dx = \int_a^e f(x)\,dx$.

2. Soit $u'(x) = x$ et $v(x) = 1 - \ln x$ alors $u(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x}$ donc $\mathcal{A}(a) = \left[\dfrac{1}{2}x^2(1 - \ln x)\right]_a^e - \displaystyle\int_a^e -\dfrac{1}{2}x\,dx$

$\mathcal{A}(a) = \left[\dfrac{1}{2}x^2(1 - \ln x)\right]_a^e + \left[\dfrac{1}{4}x^2\right]_a^e$ donc $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}e^2(1 - \ln e) - \dfrac{1}{2}a^2(1 - \ln a) + \dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{1}{4}a^2$

$\mathcal{A}(a) = -\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 \ln a + \dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{1}{4}a^2$

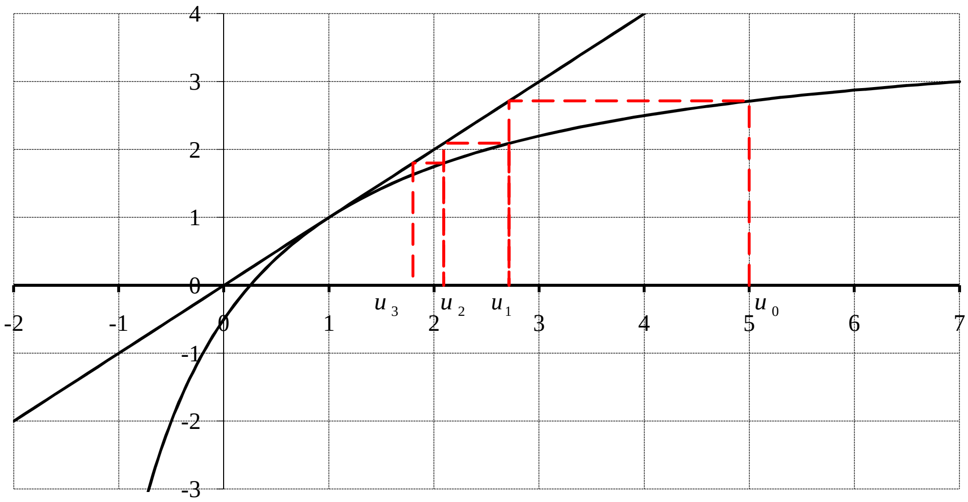
$\mathcal{A}(a) = -\dfrac{3}{4}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 \ln a + \dfrac{1}{4}e^2$

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, u_{n+1}

1. *a.*



b. La suite (u_n) semble être décroissante et converger vers 1.

2. *a.* $u_0 = 5$ donc $u_0 - 1 > 0$
La propriété est vraie pour $n = 0$
Supposons la vraie pour un rang n et montrons qu'alors la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $u_{n+1} - 1 > 0$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

$u_n > 1$ donc $\dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 1}$

$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$ or pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est décroissante minorée par 1 donc converge et sa limite est supérieure ou égale à 1

$u_{n+1} = f(u_n)$ et f est définie continue sur $]-2\,;+\infty[$ donc (u_n) étant une suite convergente, sa limite est solution de $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{4x-1}{x+2} = x$ et $x \neq -2 \Leftrightarrow 4x - 1 = x^2 + 2x$ et $x \neq -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ et $x \neq -2 \Leftrightarrow x = 1$ donc (u_n) converge vers 1.

3. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ or $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)}$ donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \dfrac{1}{u_n - 1}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3}$. La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$ donc pour tout nombre entier naturel n, $v_n = v_0 + \dfrac{n}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{3 + 4n}{12}$

c. $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{12}{3 + 4n}$ donc $u_n = 1 + \dfrac{12}{3 + 4n}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{12}{3 + 4n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats

1. *a.* En remplaçant x, y et z par les coordonnées de C dans l'équation de (P) : $3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 3$ donc C n'appartient pas au plan (P).

b. Tout point M de (D) *a* des coordonnées de la forme $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$ or $3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0$ donc la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. *a.* Un vecteur directeur de (D) est un vecteur normal à (Q) donc $\vec{n}(-1\,;2\,;-1)$ est un vecteur normal à (Q)
(Q) *a* une équation cartésienne de la forme $-x + 2y - z + d = 0$
C $\in$ (Q) donc en remplaçant x, y et z par les coordonnées de C dans l'équation de (Q) : $-1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0$ donc $d = -3$
une équation cartésienne du plan (Q) est $-x + 2y - z - 3 = 0$ ou encore $x - 2y + z + 3 = 0$

b. I est un point de (D) donc il existe t réel tel que les coordonnées de I soient $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$

I $\in$(Q) donc $-t + 1 - 4t - t + 2 + 3 = 0$ soit $-6t + 6 = 0$ donc $t = 1$ donc I (0 ; 2 ; 1).

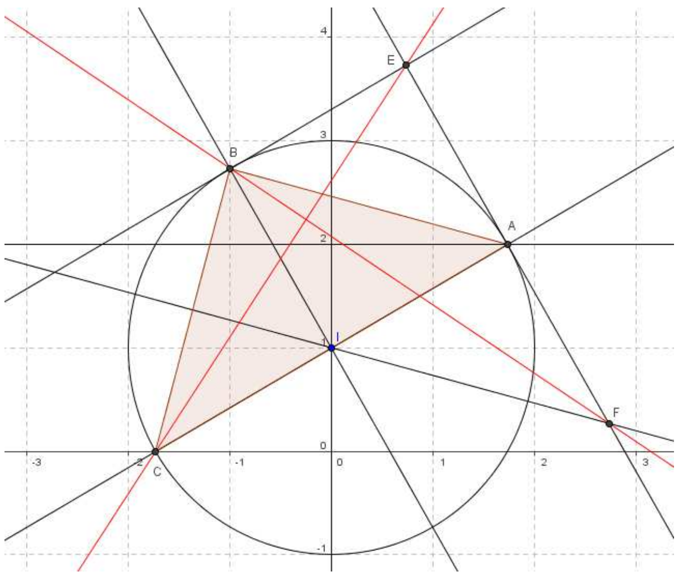
c. $\overrightarrow{\text{CI}}$ a pour coordonnées $(-1\,;1\,;1)$ donc $\text{CI}^2 = 3$ soit $\text{CI} = \sqrt{3}$.

3. *a.* $\overrightarrow{\text{CM}_t}$ a pour coordonnées $(-t\,;2t-3\,;-t)$.donc $\text{CM}_t^{\,2} = t^2 + (2t-3)^2 + t^2 = t^2 + 4t^2 - 12t + 9 + t^2$
pour tout nombre réel t , $\text{CM}_t^{\,2} = 6t^2 - 12t + 9$.

b. $\text{CM}_t^{\,2} = 6t^2 - 12t + 9 = 6(t^2 - 2t) + 9$ donc $\text{CM}_t^{\,2} = 6(t-1)^2 + 9 - 6 = 6(t-1)^2 + 3$
pour tout nombre réel t , $\text{CM}_t^{\,2} \geq 3$ soit $\text{CM}_t \geq \sqrt{3}$, donc CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $\text{AI}^2 = |z_A - z_I|^2 = |\sqrt{3} + 2\,\text{i} - \text{i}|^2 = |\sqrt{3} + \text{i}|^2 = 4$
donc AI = 2 donc le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.



b. r a pour expression complexe : $z' = e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_I) + z_I$
soit $z' = \text{i}(z - \text{i}) + \text{i}$ donc $z_B = \text{i}(\sqrt{3} + 2\,\text{i} - \text{i}) + \text{i}$
donc $z_B = \text{i}(\sqrt{3} + \text{i}) + \text{i}$ soit $z_B = \text{i}\sqrt{3} - 1 + \text{i}$
donc $z_B = -1 + \text{i}(\sqrt{3} + 1)$.
B est l' image du point A par la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc IB = IA donc IB = 2 donc B $\in$ Γ.

c. Le point C est le symétrique du point A par rapport au point I donc I est le milieu de [AC] donc $\dfrac{z_A + z_C}{2} = z_I$
soit $z_C = 2z_I - z_A$ donc $z_C = 2\,\text{i} - \sqrt{3} - 2\,\text{i} = -\sqrt{3}$

d. B appartient au cercle (Γ) et [AC] est un diamètre de ce cercle donc le triangle ABC est rectangle en B
(IB) est perpendiculaire à (AC) donc la médiane issue de B de ce triangle est aussi hauteur donc le triangle ABC est isocèle en B.

2. Apparemment les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{\text{BF}}\,.\,\overrightarrow{\text{CE}} = (\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AF}})\,(\overrightarrow{\text{CA}} + \overrightarrow{\text{AE}}) = \overrightarrow{\text{BA}}\,.\,\overrightarrow{\text{CA}} + \overrightarrow{\text{AF}}\,.\,\overrightarrow{\text{CA}} + \overrightarrow{\text{BA}}\,.\,\overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{AF}}\,.\,\overrightarrow{\text{AE}}$

Les droites (AF) et (IB) sont parallèles et le triangle ABI est rectangle en I donc $\overrightarrow{\text{AF}}\,.\,\overrightarrow{\text{CA}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\text{BA}}\,.\,\overrightarrow{\text{AE}} = (\overrightarrow{\text{BI}} + \overrightarrow{\text{IA}})\,.\,\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{BI}}\,.\,\overrightarrow{\text{AE}} = -\text{BI}^2$

$\overrightarrow{\text{AF}}\,.\,\overrightarrow{\text{AE}} = -\text{BI}^2$ donc $\overrightarrow{\text{BF}}\,.\,\overrightarrow{\text{CE}} = (\overrightarrow{\text{BI}} + \overrightarrow{\text{IA}})\,.\,\overrightarrow{\text{CA}} - 2\,\text{BI}^2$

$\overrightarrow{\text{BF}}\,.\,\overrightarrow{\text{CE}} = \overrightarrow{\text{BI}}\,.\,\overrightarrow{\text{CA}} + \overrightarrow{\text{IA}}\,.\,\overrightarrow{\text{CA}} - 2\,\text{BI}^2 = 2\,\text{IA}^2 - 2\,\text{IB}^2$ or IA = IB donc $\overrightarrow{\text{BF}}\,.\,\overrightarrow{\text{CE}} = 0$

Les droites (BF) et (CE) sont perpendiculaires.

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a. la similitude directe s a pour écriture complexe $z' = a\,z + b$

s(O) = D donc $b = 1$ donc la similitude directe s a pour écriture complexe $z' = a\,z + 1$

s'A) = E donc $1 + 3\,\text{i} = -2\,a + 1$ donc $-2\,a = 3\,\text{i}$ donc $a = -\dfrac{3}{2}\,\text{i}$

L'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\dfrac{3}{2}\,\text{i}\,z + 1$.

b. l'angle de la similitude s est arg (a) soit $\dfrac{3\,\pi}{2}$

Le rapport de la similitude s est $|\,a\,| = \dfrac{3}{2}$

c. Une similitude transforme un rectangle en un rectangle, s(O) = D et s(A) = E

s(B) est le point d'affixe $z' = -\dfrac{3}{2}(-2 + \text{i})\,\text{i} + 1 = \dfrac{5}{2} + 3\,\text{i}$ donc s(B) = F

s(C) est le point d'affixe $z' = -\dfrac{3}{2}\,\text{i}^2 + 1 = \dfrac{5}{2}$ donc s(C) = G

L'image par s du rectangle OABC est le rectangle DEFG.

2. *a.* s'(D) est le point d'affixe $z' = -\dfrac{2}{3}\,\text{i} + \dfrac{5}{3}\,\text{i} = \text{i}$ donc s'(D) = C

s'(E) est le point E'affixe $z' = -\dfrac{2}{3}\,\text{i}\,(1 - 3\,\text{i}) + \dfrac{5}{3}\,\text{i} = -2 + \text{i}$ donc s'(E) = B

s'(G) est le point G'affixe $z' = -\dfrac{2}{3}\,\text{i} \times \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\,\text{i} =$ donc s'(G) = O

s'(F) est le point F'affixe $z' = -\dfrac{2}{3}\,\text{i}\,(\dfrac{5}{2} - 3\,\text{i}) + \dfrac{5}{3}\,\text{i} = -2$ donc s'(F) = A

L'image par s' du rectangle DEFG est le rectangle OABC.

b. g(O) = s'(D) = C ; g(A) = s'(E) = B ; g(B) = s'(F) = A et g(C) = s'(G) = O

l'image du rectangle OABC par la similitude g est le rectangle OABC.

c. Une similitude conserve les barycentres donc g transforme le centre O du rectangle OABC en lui-même , le milieu I de [AB] en lui-même donc g est une symétrie indirecte admettant 2 points fixes distincts donc est la réflexion d'axe (OI).

g admet une infinité de points fixes : la droite (OI).