I. *a.* Soient $a$ et $b$ des entiers compris entre 0 et 9, et $n$ un entier $n \geq 10$. Montrer que $a$ congru à $b$ (mod $n$) $\Leftrightarrow a = b$.

*b.* Soit en base 10, un entier N composé de 12 chiffres : $N = \overline{a_{11}\, a_{10} \ldots a_1\, a_0}^{\,10} = \sum_{k=0}^{11} a_k\, 10^k$ .

Montrer que $N \equiv \sum_{k=0}^{5} a_{2k} - \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}$ (11).

*c.* Déterminer selon les valeurs de l'entier $n$ quel est le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 13.

II. Un produit a été codé à l'aide d'un nombre entier N comportant 12 chiffres et d'une clé de contrôle, mais deux chiffres ont été effacés. Les retrouver sachant que la clé est composée en deux parties :

1. reste de la division euclidienne de N par 11 et
2. reste de la division euclidienne de N par 13.

Le code est : 25XX21010029 et la clé : 10/7. Déterminer X.

## CORRECTION

I. *a.* Démonstration en deux étapes.

**Etape 1 :** $a \equiv b$ (mod $n$) **donc** $a = b$.

Si $a \equiv b$ ($n$) alors $a - b = n\, q$ avec $q \in \mathbb{Z}$ or $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$ donc $-9 \leq a - b \leq 9$.

$n \geq 10$ donc le seul multiple de $n$ compris entre $-9$ et 9 est 0 donc $a - b = 0$ soit $a = b$

**Etape 2 :** $a = b$ **donc** $a \equiv b$ (mod $n$)

si $a = b$ alors $a - b = 0$ donc $a - b = 0 \times n$ donc $a \equiv b$ ($n$)

**Conclusion :** $a \equiv b$ (mod $n$) $\Leftrightarrow a = b$.

*b.* $10 = 11 - 1$ donc $10 \equiv -1$ (11) donc $10^p \equiv (-1)^p$ (11)

si $p$ est pair, il existe un entier $k$ ($0 \leq k \leq 5$) tel que $p = 2\,k$, alors $10^p \equiv (-1)^{2k}$ (11) donc $10^p \equiv 1$ (11).

si $p$ est impair, il existe un entier $k$ ($0 \leq k \leq 5$) tel que $p = 2\,k + 1$ alors $10^p \equiv (-1)^{2k+1}$ (11) donc $10^p \equiv -1$ (11).

$N \equiv -a_{11} + a_{10} - a_9 + a_8 + \ldots + a_0$ (11) donc $N \equiv \sum_{k=0}^{5} a_{2k} - \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}$ (11).

*c.*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| modulo 13, $10^n$ est congru à | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 | 1 | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 | 1 |

donc $10^{6k} \equiv 1$ modulo 13

$10^{6k+1} \equiv 10$ modulo 13

$10^{6k+2} \equiv 9$ modulo 13

$10^{6k+3} \equiv 12$ modulo 13

$10^{6k+4} \equiv 3$ modulo 13

$10^{6k+5} \equiv 4$ modulo 13

le reste de la division euclidienne de $10^n$ par 13 est

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | si $n$ est de la forme $6\,k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, | 10 | si $n$ est de la forme $6\,k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, |
| 9 | si $n$ est de la forme $6\,k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, | 12 | si $n$ est de la forme $6\,k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$, |
| 3 | si $n$ est de la forme $6\,k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$, | 4 | si $n$ est de la forme $6\,k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$, |

II. N = 2 5 X X 2 1 0 1 0 0 2 9 donc $N \equiv 9 - 2 + 0 - 0 + 1 - 0 + 1 - 2 + X - X + 5 - 2$ (11) d'après la question I. *b.*

$N \equiv 10$ (11) pas de condition sur X

$N = 2 \times 10^{11} + 5 \times 10^{10} + X \times 10^9 + X \times 10^8 + 2 \times 10^7 + 10^6 + 10^4 + 2 \times 10 + 9$

$N = 2 \times 10^{6+5} + 5 \times 10^{6+4} + X \times 10^{6+3} + X \times 10^{6+2} + 2 \times 10^{6+1} + 10^6 + 10^4 + 2 \times 10 + 9$

En appliquant les résultats de I. *c.*

$N \equiv 2 \times 4 + 5 \times 3 + X \times 12 + X \times 9 + 2 \times 10 + 1 + 3 + 2 \times 10 + 9$ (13)

$N \equiv X \times 21 + 76$ (13)

$N \equiv X \times 8 + 11$ (13)

Le reste de la division euclidienne de N par 13 est 7 donc $N \equiv 7$ modulo 13 donc $8\,X + 11 \equiv 7$ (13)

$8\,X \equiv -4$ (13) soit $8\,X \equiv 9$ (13)

$5 \times 8 = 40$ donc $5 \times 8 \equiv 1$ (13) donc $5 \times 8\,X \equiv 5 \times 9$ (13) donc $X \equiv 45$ (13)

$X \equiv 6$ (13) or $0 \leq X \leq 9$ donc $X = 6$

N = 256 621 010 029