Pondichéry mai 2018

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$$

où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$. En déduire son tableau de variations complet.

c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par : $\dfrac{1}{t_2 - t_1} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.

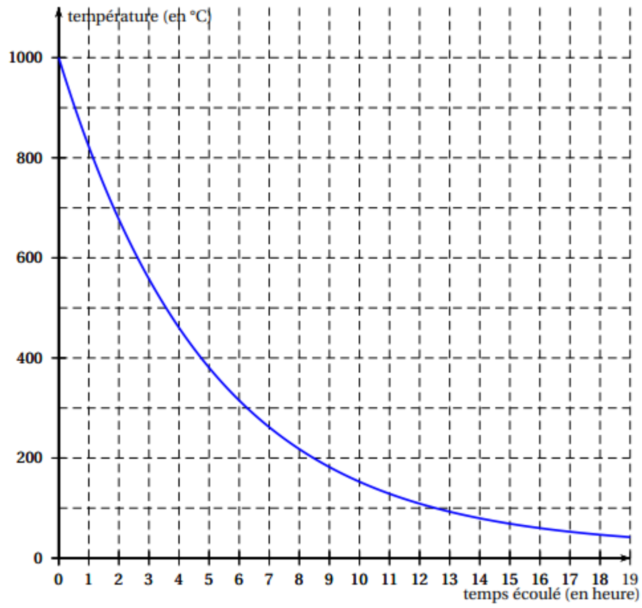
b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t + 1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t + 1)$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel t positif :

$$d(t) = 980\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}.$$

b. Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en donner ?



EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. La température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement est de 463 ° C.

n	0	1	2	3	4
T	1000	823,6	678,95	560,34	463,08

2. D'après l'algorithme $T_{n+1} = 0{,}82\ T_n + 3{,}6$

Montrons par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

Initialisation : si $n = 0$ alors $980 \times 0{,}82^0 + 20 = 980 + 20 = 1000 = T_0$

La propriété est initialisée.

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$ alors $T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 20$.

$T_{n+1} = 0{,}82\ T_n + 20$ et $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 3{,}6$ donc $T_{n+1} = 0{,}82\ (980 \times 0{,}82^n + 20) + 3{,}6$

$T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 0{,}82 \times 20 + 3{,}6$.

$T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 16{,}4 + 3{,}6$.

$T_{n+1} = 980 \times 0{,}82^{n+1} + 20$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.

3. Le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques si $T_n \leq 70$

soit $980 \times 0{,}82^n + 20 \leq 70 \Leftrightarrow 0{,}82^n \leq \dfrac{50}{980} \Leftrightarrow n \ln 0{,}82 \leq -\ln 19{,}6 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{-\ln 19{,}6}{\ln 0{,}82}$

$\dfrac{-\ln 19{,}6}{\ln 0{,}82} \approx 14{,}99$, il faudra donc attendre 15 heures pour ouvrir le four sans risque.

Partie B

1. $f(0) = 1000$ donc $a + b = 1000$

$f'(t) = -\dfrac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}}$ donc $f'(t) + \dfrac{1}{5} f(t) = -\dfrac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}} + \dfrac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}} + \dfrac{1}{5} b = \dfrac{1}{5} b$ or $f'(t) + \dfrac{1}{5} f(t) = 4$ donc $\dfrac{1}{5} b = 4$ soit $b = 20$

$a + b = 1000$ donc $a = 980$ donc pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20$.

2. *a.* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-t}{5} = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$.

b. $f'(t) = -\dfrac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}}$ avec $a = 980$ or la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$

f est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
f	1000	$\searrow$	20

c. $f(t) \leq 70 \Leftrightarrow 980\ e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} \leq \dfrac{50}{980} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{5}} \geq 19{,}6 \Leftrightarrow \dfrac{t}{5} \geq \ln 19{,}6 \Leftrightarrow t \geq 5 \ln 19{,}6$

$5 \ln 19{,}6 \approx 14{,}878$ donc $14{,}878 \times 60 = 892{,}68$

Il faudra donc attendre 893 minutes pour ouvrir le four sans risque.

3. *a.* La fonction f est positives sur R donc $\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 15$.

Construisons 5 trapèzes pour évaluer cette aire.

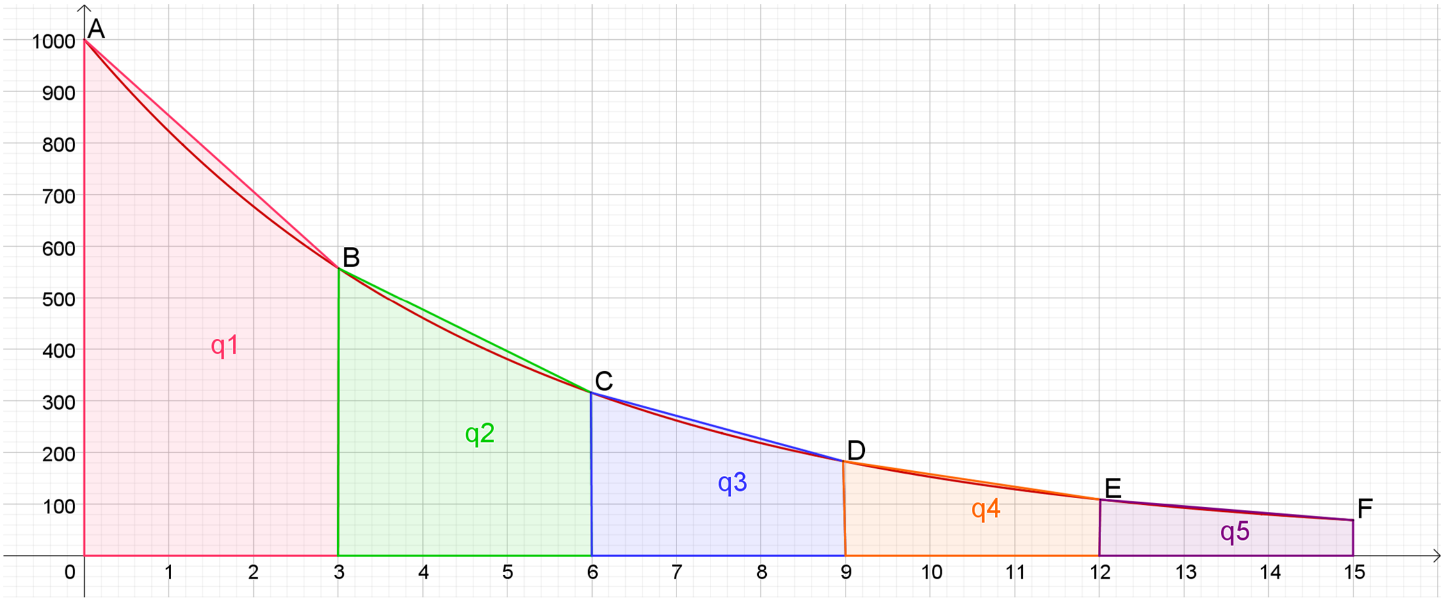
L'aire d'un trapèze est égale à $\dfrac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur}$

Soit pour l'aire de q1 : $\dfrac{1000 + f(3)}{2} \times 3$, pour l'aire de q1 : $\dfrac{f(3) + f(4)}{2} \times 3$ etc.

donc $\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1000+f(3)}{2}\times 3+\frac{f(3)+f(6)}{2}\times 3+\frac{f(6)+f(9)}{2}\times 3+\frac{f(9)+f(12)}{2}\times 3+\frac{f(12)+f(15)}{2}\times 3$

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{3}{2}\,[1000+f(15)]+3\,[f(3)+f(6)+f(9)+f(12)]$

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 5094{,}89$ donc $\displaystyle\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{5094{,}89}{15}$ soit approximativement 339,66 degré Celcius.



b. $\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[980\times(-5)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\,t\right]_0^{15} = [-4900\,\mathrm{e}^{-3}+300]-(-4900)$

$\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = -4900\,\mathrm{e}^{-3}+5200$ donc $\displaystyle\theta = \frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{5200-4900\,\mathrm{e}^{-3}}{15} = \frac{1040-980\,\mathrm{e}^{-3}}{3}$ soit approximativement 330 ° C.

4. *a.* $d(t+1) = 980\ \mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}}+20-\left(980\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right) = 980\left(\mathrm{e}^{-\frac{t+1}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right) = 980\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\times\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\right)$ donc, pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

b. On a vu que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$.

L'écart de température entre deux instants séparés d'une heure devient de plus en plus proche de 0 et donc, qu'au bout d'un certain temps, la température du four se stabilise.