Pondichéry avril 2007

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

– La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
– la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
– une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(\text{A}) = s'(\text{A})$, $s(\text{B}) = s'(\text{B})$ et $s(\text{C}) = s'(\text{C})$. Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe 1 + i, F d'affixe 2 + i et G d'affixe 3 + i.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.

c. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $\text{A}' = h(\text{A})$ et $\text{G}' = h(\text{G})$, et on appelle I le milieu de [EA′].

On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $\text{S} = \sigma \circ h$.

CORRECTION

1. Soit $\text{S} = s^{-1} \text{ o } s'$, la composée deux similitudes planes est une similitude plane donc S une similitude.

$\text{A} \xrightarrow{s} \text{A}_1$ donc $\text{A}_1 \xrightarrow{s^{-1}} \text{A}$ donc $\text{S(A)} = s^{-1}(\text{A}_1) = \text{A}$

$\text{B} \xrightarrow{s} \text{B}_1$ donc $\text{B}_1 \xrightarrow{s^{-1}} \text{B}$ donc $\text{S(B)} = s^{-1}(\text{B}_1) = \text{B}$

$\text{C} \xrightarrow{s} \text{C}_1$ donc $\text{C}_1 \xrightarrow{s^{-1}} \text{C}$ donc $\text{S(C)} = s^{-1}(\text{C}_1) = \text{C}$

S est une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan donc S est l'identité du plan.

$s^{-1} \text{ o } s' = \text{Id} \Leftrightarrow s \text{ o } s^{-1} \text{ o } s' = s \text{ o Id} \Leftrightarrow s' = s$

2. *a*. OA = 2 ; OG = $\sqrt{10}$; AG = $\sqrt{2}$

OE = $\sqrt{2}$; OF = $\sqrt{5}$; EF = 1

$\dfrac{\text{OA}}{\text{OE}} = \dfrac{\text{OG}}{\text{OF}} = \dfrac{\text{AG}}{\text{EF}} = \sqrt{2}$ donc les triangles OAG et OEF sont donc semblables.

***b*.** S'il existe une similitude indirecte S transformant OAG en OEF, son écriture est de la forme : $z' = a\,\bar{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$.

$\text{S(O)} = \text{O} \Leftrightarrow 0 = a \times 0 + b$ donc $b = 0$

$\text{S(G)} = \text{F} \Leftrightarrow 1 + \text{i} = 2\,a + b$

$\text{S(A)} = \text{E} \Leftrightarrow 2 + \text{i} = a\,(3 - \text{i}) + b$

$1 + \text{i} = 2\,a + b$ et $b = 0$ donc $a = \dfrac{1+\text{i}}{2}$

Vérification Si $z' = \dfrac{1+\text{i}}{2}\,\bar{z}$ alors $\dfrac{1+\text{i}}{2} \times (3 - \text{i}) = \dfrac{1}{2}(3 - \text{i} + 3\,\text{i} + 1) = 2 + \text{i}$ donc S(A) = E

L'écriture complexe de S est donc : $z' = \dfrac{1+\text{i}}{2}\,\bar{z}$.

***c*.** L'écriture complexe de h est : $z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z$

L'affixe de A′ est donc $\sqrt{2}$

Le milieu I de [EA′] a pour affixe $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\text{i}$.

Soit $\sigma = \text{S o } h^{-1}$, h^{-1} est l'homothétie de centre O de rapport $\sqrt{2}$ donc d'écriture complexe $z' = \sqrt{2}\,z$

$\text{S o } h^{-1}$ a pour écriture complexe $z' = \dfrac{1+\text{i}}{2} \times \sqrt{2}\,\bar{z}$ soit $z' = \dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}\,\bar{z}$

On vérifie que σ est une similitude indirecte laissant O invariant. Montrons que σ laisse I invariant :

$$\frac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,\text{i}\right) = \frac{1+\text{i}}{\sqrt{2}} + \frac{1+\text{i}}{2} + \frac{1-\text{i}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}\,\text{i}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{i} \text{ donc } \sigma(\text{I}) = \text{I}$$

σ est une similitude indirecte laissant O et I invariants donc est une réflexion d'axe (OI).