

ANGLES ORIENTES - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

- 1) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points M tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 2) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points N tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{38\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 3) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points P $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = x$ avec $3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice n°2.

Soit (C) un cercle de centre A et B un point de (C)

- 1) Construire les points C,D,E et F du cercle (C) tels que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = -\frac{3\pi}{4}$$

- 2) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \quad (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}) \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$$

Exercice n°3.

ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que $AC=5$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{2\pi}{5} (2\pi)$

- 1) Tracez le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.
- 2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) \quad (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}) \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}) \quad (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC})$$

ANGLES ORIENTES - CORRECTION

Exercice n°1

1) Puisque $\frac{27\pi}{6} = \frac{(24+3)\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times \underbrace{2\pi}_{\substack{\text{un tour dans} \\ \text{le sens trigo}}} + \frac{\pi}{2}$, on peut écrire que

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

2) Puisque $-\frac{38\pi}{3} = -\frac{(36+2)\pi}{3} = -12\pi - \frac{2\pi}{3} = 6 \times \underbrace{(-2\pi)}_{\substack{\text{un tour dans} \\ \text{le sens trigo} \\ \text{inverse}}} - \frac{2\pi}{3}$, on peut écrire que

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = 6 \times (-2\pi) - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

3) Attention à la division par 3 :

$$\text{Si } 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ alors } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Pour $k=0$, on obtient $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ (point P_0)

Pour $k=1$ on obtient $x_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (point P_1)

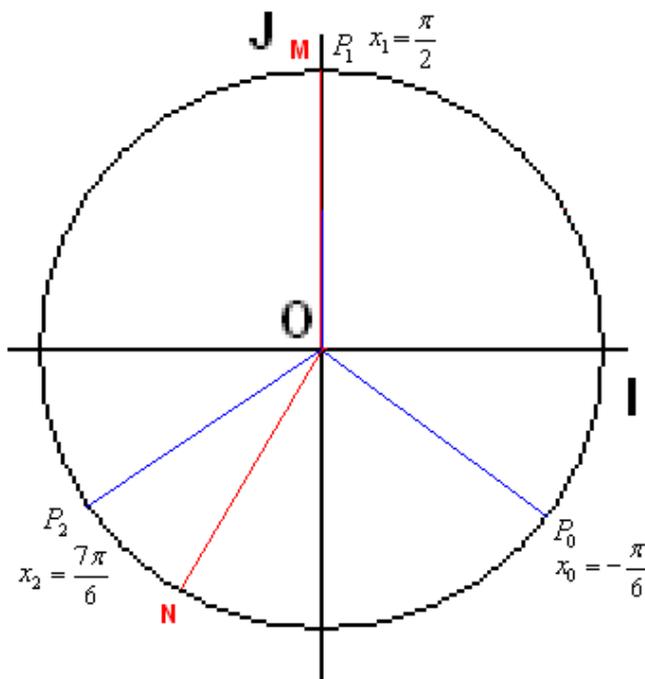
Pour $k=2$ on obtient $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2 \times 2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ (point P_2)

Pour $k=3$ on obtient $x_3 = -\frac{\pi}{6} + \frac{3 \times 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$.

On retombe sur le point P_0

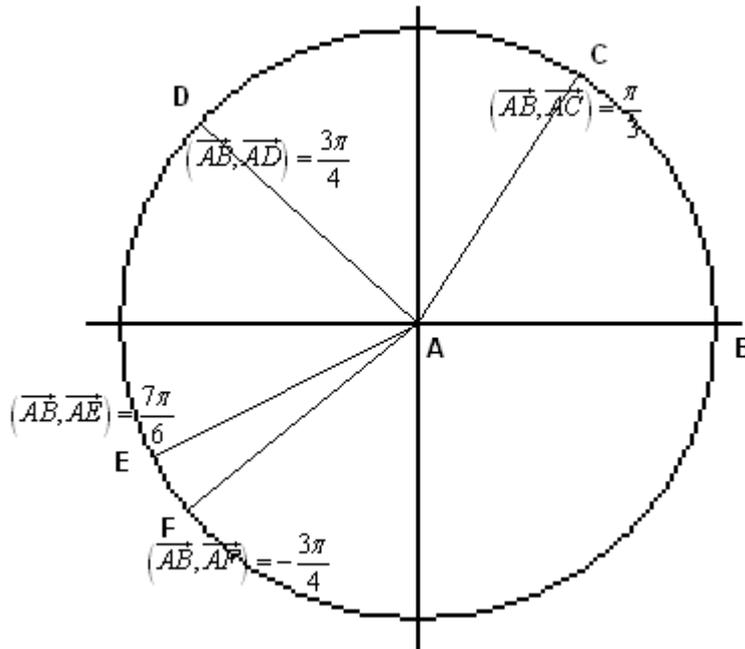
De même, pour $k=-1$ on obtient $x_{-1} = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$.

On retombe sur le point P_2



Exercice n°2

1) (Au départ, le point B peut être choisi n'importe où sur le cercle)



2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs :

$$(\vec{AC}, \vec{AE}) = (\vec{AC}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AE})(2\pi)$$

$$= -(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{AB}, \vec{AE})(2\pi)$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}(2\pi)$$

$$\boxed{= \frac{5\pi}{6}(2\pi)}$$

$$(\vec{AF}, \vec{AC}) = (\vec{AF}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AC})(2\pi)$$

$$= -(\vec{AB}, \vec{AF}) + (\vec{AB}, \vec{AC})(2\pi)$$

$$= -\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

$$= \frac{13\pi}{12}(2\pi) \boxed{= -\frac{11\pi}{12}(2\pi)}$$

$$(\vec{AD}, \vec{AF}) = (\vec{AD}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AF})(2\pi)$$

$$= -(\vec{AB}, \vec{AD}) + (\vec{AB}, \vec{AF})(2\pi)$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{3\pi}{4}\right)(2\pi)$$

$$= -\frac{3\pi}{2}(2\pi) \boxed{= \frac{\pi}{2}(2\pi)}$$

$$(\vec{AF}, \vec{AE}) = (\vec{AF}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AE})(2\pi)$$

$$= -(\vec{AB}, \vec{AF}) + (\vec{AB}, \vec{AE})(2\pi)$$

$$= -\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{7\pi}{6}(2\pi)$$

$$= \frac{23\pi}{12}(2\pi) \boxed{= -\frac{\pi}{12}(2\pi)}$$

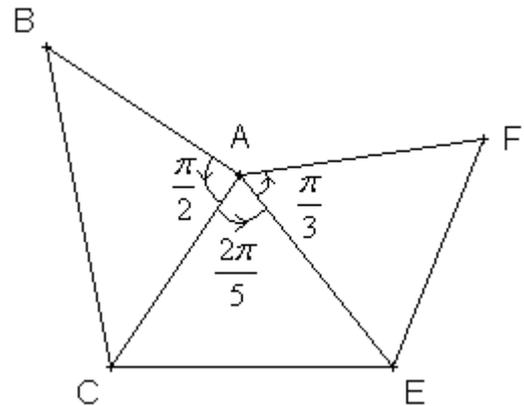
Exercice n°3

1) Si le triangle AEF est triangle équilatéral direct, alors $AE=AF$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}$

Si le triangle ABC est isocèle rectangle direct en A, alors $AB=AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs, et de la propriété $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) - \pi(2\pi)$, on détermine :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(2\pi) \\ &= -\frac{37\pi}{30}(2\pi) = \boxed{\frac{23\pi}{30}(2\pi)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) + (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BC})(2\pi) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{10} + (-\overrightarrow{CE}, -\overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= \frac{19\pi}{30} + (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= \frac{19\pi}{30} + \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{4}(2\pi) = \frac{28\pi}{30} + \frac{\pi}{4}(2\pi) \\ &= \frac{71\pi}{60}(2\pi) = \boxed{-\frac{49\pi}{60}(2\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}) &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{5}\right) + (-\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(2\pi) \\ &= -\frac{11\pi}{15} + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) - \pi(2\pi) \\ &= -\frac{11\pi}{15} + \frac{\pi}{4} - \pi(2\pi) = -\frac{89\pi}{60}(2\pi) = \boxed{\frac{31\pi}{60}(2\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}) &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC})(2\pi) \\ &= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) + (-\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) - \pi(2\pi) \\ &= -\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{10} - \pi(2\pi) = -\frac{31\pi}{30}(2\pi) = \boxed{\frac{29\pi}{30}(2\pi)} \end{aligned}$$