

**Possibilités des microordinateurs simulation numérique d'une vague déferlante, dont le mouvement en profondeur et le profil sont calculés par microordinateur.**

Par  
B.SCHAEFFER  
Docteur ès Sciences

Résumé

Le mouvement d'une vague créée dans un canal à houle par un générateur de vagues du type piston a été simulé sur microordinateur par un calcul de différences finies.

La méthode de calcul consiste à découper le volume fluide en quadrilatères où la pression et les autres paramètres sont constants et à diviser le temps en petits intervalles égaux. On associe à chaque nœud du maillage ainsi créé un élément obtenu en joignant entre eux les quatre nœuds voisins. On applique pour chaque pas de temps à cet élément les lois fondamentales de la mécanique qu'on intègre par différences finies au premier ordre. Le fluide est homogène, pesant, compressible et a une tension superficielle. Le logiciel a été validé par comparaison avec des résultats expérimentaux et numériques issus de la littérature, concernant des vagues de moyenne amplitude. Le calcul est possible au-delà du déferlement. En faisant varier la profondeur et la vitesse du piston on a trouvé que la vitesse de la base de la vague ne dépend que de la profondeur mais que la vitesse de la crête est double de celle du piston. Un film d'animation a été réalisé à l'aide d'une caméra, déclenchée par le microordinateur, filmant l'écran.

**SOMMAIRE**

Le mouvement d'une vague créée dans un canal à houle par un générateur de vagues du type piston a été simulé sur microordinateur par un calcul de différences finies.

La méthode de calcul consiste à découper le volume fluide en quadrilatères où la pression et les autres paramètres sont constants et à diviser le temps en petits intervalles égaux. On associe à chaque nœud du maillage ainsi créé un élément obtenu en joignant entre eux les quatre nœuds voisins. On applique pour chaque pas de temps à cet élément les lois fondamentales de la

mécanique qu'on intègre par différences finies au premier ordre. Le fluide est homogène, pesant, compressible et a une tension superficielle. Le logiciel a été validé par comparaison avec des résultats expérimentaux et numériques issus de la littérature, concernant des vagues de moyenne amplitude. Le calcul est possible au-delà du déferlement. En faisant varier la profondeur et la vitesse du piston on a trouvé que la vitesse de la base de la vague ne dépend que de la profondeur mais que la vitesse de la crête est double de celle du piston. Un film d'animation a été réalisé à l'aide d'une caméra, déclenchée par le microordinateur, filmant l'écran.

**Microcomputer capabilities - Numerical simulation of a crashing wave, which depth movement and profile are calculated with a microcomputer.**

### SUMMARY

A new microcomputer program using a simple finite differences algorithm has been devised and applied to the simulation of the movement of a water wave generated by a piston-type wavemaker moving at a constant speed in a channel.

A grid is applied on the fluid domain, dividing it into quadrilateral cells where the pressure is constant and in quadrilateral elements obtained by joining the four immediate neighbours of the current node of the grid. During a time increment, an element is considered as a translating solid on which the surface forces are constant along each side. The body forces are constant in the whole element. After having computed the resultant force, Newton's law is applied and the displacement obtained by integrating twice the acceleration, using first order finite differences. The two-dimensional fluid is homogeneous, weighty, compressible and has surface tension.

The computing method has been validated by comparison with experimental and numerical results from the literature involving large free surface motion. The crashing of a wave has been successfully simulated. By varying depth and wavemaker speed, it was found that, while the base of the wave has a speed depending only on the depth, the crest has a speed twice that of the wavemaker. The screen of the microcomputer was filmed by a camera triggered by the microcomputer.

### **1 - Les vagues**

Le phénomène de la vague déferlante a été l'objet de nombreuses représentations artistiques depuis des temps immémoriaux. Les premiers comptes rendus d'observations soignées du mouvement des vagues ont été

faits par Léonard de Vinci qui a réalisé les premiers essais sur maquettes de navires [1]. La première étude mathématique du mouvement des vagues semble avoir été faite par Newton, qui a expliqué les marées. Les premières expériences ont été effectuées il y a plus d'un siècle sur la cuve à houle construite par les frères Weber.

### 1.1 - Les vagues en laboratoire

Le canal à houle est certes très éloigné de la réalité de l'Océan, mais en simplifiant à l'extrême on peut plus facilement analyser le mécanisme du mouvement des vagues car elles sont alors créées dans des conditions bien déterminées [1]. La méthode la plus simple consiste à les produire à l'aide d'un piston animé d'un mouvement périodique. On peut alors mesurer un nombre fini de paramètres comme la vitesse, la hauteur ou la longueur d'onde des vagues, en fonction de la vitesse ou de la fréquence du piston et de la géométrie du bassin.

### 1.2 - La théorie mathématique des vagues et de la houle (Fig. 1)

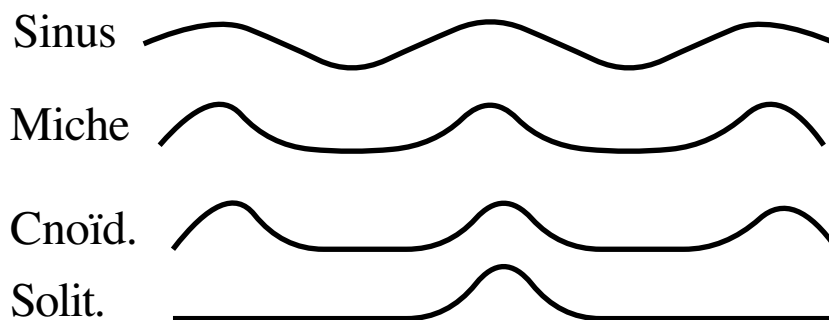
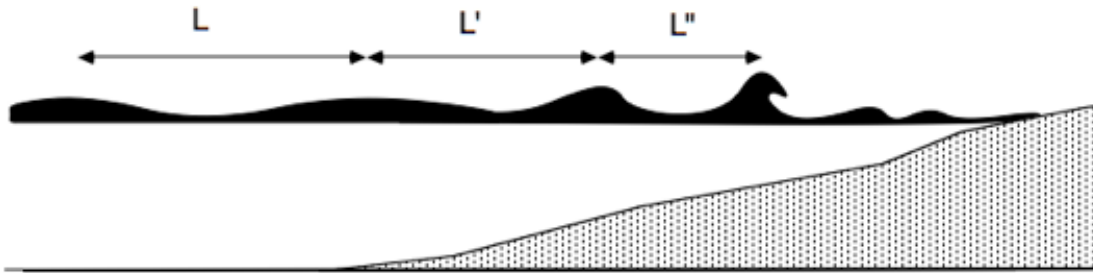


Fig. 1 - Houles mathématiques (d'après J. Larras)

Des théories de la houle ont été établies grâce à des fonctions mathématiques comme la sinusoïde, bien connue, ou la cycloïde qui l'est un peu moins. Les travaux sur le déferlement des vagues sont plus récents car la forme d'une vague déferlante (Fig. 2) est difficile à représenter par une formule mathématique [2].

## DEFERLEMENT SUR UN RIVAGE EN PENTE

FIG. 2



### 1.2.1 - Houle sinusoïdale

La houle sinusoïdale correspond à un mouvement dont l'équation est donnée par des fonctions sinusoïdales. Les orbites sont circulaires en eau profonde et elliptiques en eau peu profonde. Le profil varie entre la sinusoïde pure et la cycloïde, en passant par la trochoïde, selon la cambrure des vagues. La sinusoïde est la représentation la plus simple du mouvement des vagues (et des ondes en général). La cycloïde, caractérisée par un point de rebroussement, est le profil limite avant déferlement.

### 1.2.2 - Houle de Miche

La Houle de Miche est une houle découverte en 1944 par Miche à l'aide des coordonnées de Lagrange au lieu des coordonnées d'Euler habituelles en mécanique des fluides [3].

### 1.2.3 - Houle cnoïdale

Lorsque la profondeur est faible, la forme des vagues change. Une des formes prises avant le déferlement sur une plage en pente douce peut être représentée en faisant appel à la fonction cosinus elliptique qu'il est d'usage de représenter par  $cn$ , d'où le nom de houle cnoïdale.

### 1.2.4 - Onde solitaire

Lorsque la zone entre les vagues devient presque plate, on peut considérer les vagues comme isolées, d'où le nom d'onde solitaire ou Soliton [4]. L'onde solitaire, en tant que telle, est une onde non périodique.

### 1.2.5 - Intumescence

L'intumescence est une vague isolée correspondant à une élévation brutale du niveau de la mer, non suivie immédiatement d'une baisse de niveau. Elle correspond par exemple au mascaret ou au tsunami.

### **1.3 - Le déferlement**

Explication en première approche d'un phénomène très complexe.

#### **1.3.1 - En mer**

Le vent entraîne l'eau en surface jusqu'au sommet de la vague, qui devient de plus en plus cambrée et peut déferler si le vent est très fort.

#### **1.3.2 - Près d'une plage**

La vitesse  $c_v$  d'une lame croît avec la profondeur selon la formule de Lagrange:

$$c_v = \sqrt{g h}$$

cas limite de toutes les théories lorsque la profondeur  $h$  tend vers zéro (le calcul et l'expérience montrent que

$$c_v = \sqrt{g (h + H)}$$

lorsqu'on ne peut plus négliger la hauteur  $H$  de la lame par rapport à la hauteur d'eau  $h$ ).

Lorsque la profondeur  $h$  diminue, les caractéristiques de la houle varient et le profil se modifie (Fig. 2). La célérité  $c_v$  diminue. Comme la période  $T$  de la houle demeure sensiblement constante, la longueur de la houle  $L = c_v T$ , diminue également.

La même quantité d'énergie se transmettant à un volume d'eau plus faible, la hauteur de la crête augmente; le profil aboutit à une forme limite instable et la crête de la vague s'effondre: on dit alors que la vague "déferle" ou "se brise". Le frottement sur le fond intervient en ralentissant les déplacements à son voisinage, ce qui tend à augmenter la forme asymétrique prise par le profil et par suite à contribuer également au déferlement.

## **2 - La mécanique des milieux continus déformables**

### **2.1 - Solides et fluides**

Les fluides se distinguent des solides en ce qu'ils finissent toujours, au repos, par prendre la forme du récipient qui les contient. Les gaz occupent tout le volume du récipient qui les contient.

En réalité on peut passer de façon continue du fluide au solide, bien que les changements d'état soient généralement brutaux. Il est des cas (la polymérisation d'une colle, par exemple) où ce passage est très progressif.

## **2.2 - Compressibilité et incompressibilité**

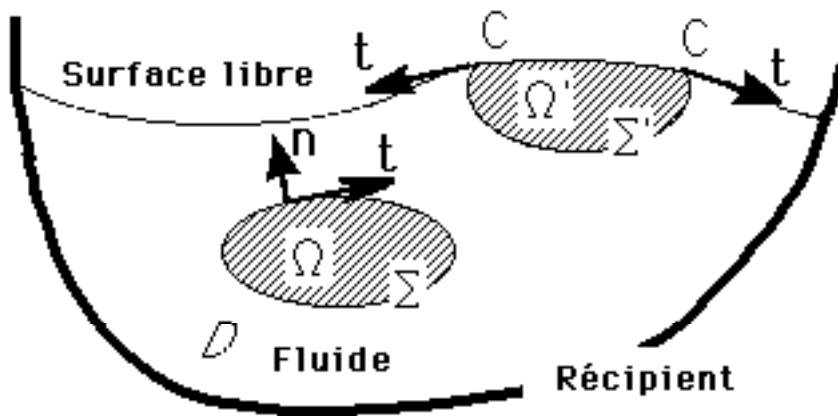
L'hypothèse d'incompressibilité, très utilisée en mécanique des fluides consiste à supposer que les liquides ne changent pas de volume sous l'action de la pression. Cela revient à dire que le son s'y propage à une vitesse infinie. Cette approximation n'est donc pas valable pour les écoulements supersoniques.

## **2.3 - Statique et dynamique**

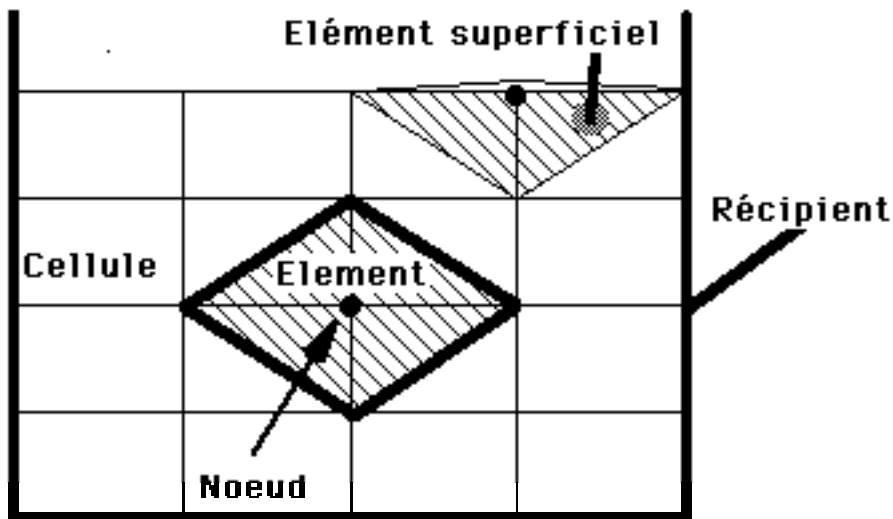
Les fluides peuvent être au repos ou en mouvement. Parfois la vitesse de l'écoulement est constante, comme dans un fleuve, par exemple: le mouvement est stationnaire. Le mouvement d'une vague ne peut être stationnaire que si la vague est immobile, ce qui peut arriver dans certains cas (notamment ressaut hydraulique ou variation de niveau au voisinage des piles d'un pont).

## **2.4 - Continu et discontinu**

A l'échelle macroscopique, la matière apparaît continue. Elle ne l'est plus à l'échelle atomique, mais l'approximation continue est généralement suffisante en mécanique des fluides. La figure 3 montre la vision d'une part du milieu continu par les mécaniciens telle qu'elle se trouve dans les ouvrages classiques de mécanique et, d'autre part, le milieu continu, découpé pour entrer dans l'ordinateur.



Représentation continue



Représentation discontinue

Fig. 3 - Domaine physique du problème

Non seulement l'espace, mais aussi le temps peut être découpé en morceaux. Dans la définition classique de la dérivée (ou de la vitesse), on fait tendre vers zéro les accroissements. Dans le calcul aux différences finies, les accroissements sont petits mais ne tendent pas vers zéro (fig. 4). La durée du calcul augmentant très vite avec la précision recherchée, les accroissements ne peuvent descendre au-dessous d'une certaine limite dépendant de la puissance de l'ordinateur.

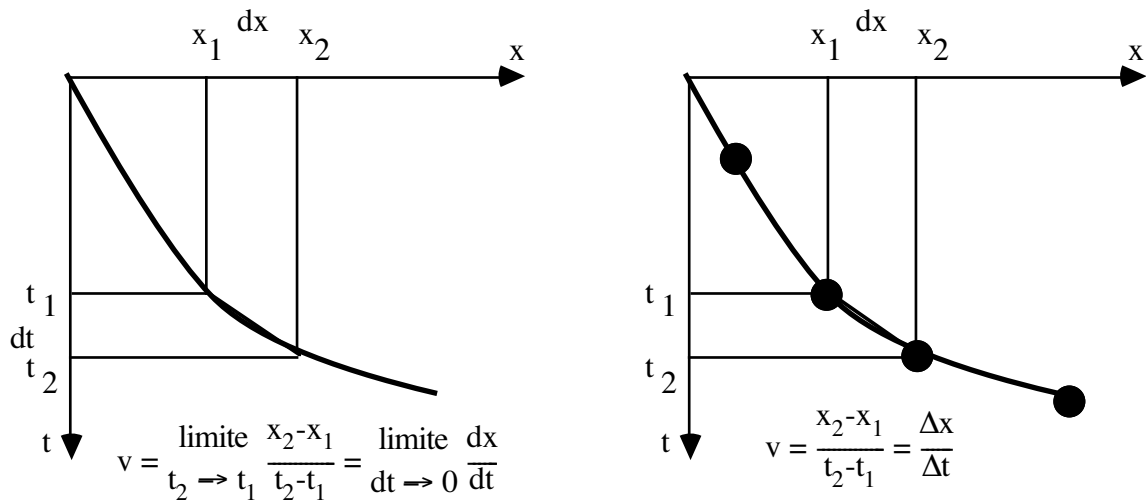


Fig. 4 - Différentielles et différences finies.

## 2.5 - Lagrange et Euler

Les noms de ces savants ont été attachés à deux façons de représenter les lois de la mécanique des milieux continus. On peut comparer la représentation eulerienne à un filet de pêche fixe dans l'eau et la représentation lagrangienne à un quadrillage tatoué sur la peau. La représentation de Lagrange est généralement utilisée en mécanique des solides. La représentation d'Euler, mieux adaptée aux fluides, est préférée lorsqu'on s'intéresse plutôt aux vitesses d'écoulement en des points fixes. Il existe des méthodes mixtes destinées à tirer parti des avantages de chaque méthode [6].

## 3 - Les méthodes de calcul

### 3.1 - Formules analytiques

Comme on l'a vu plus haut, des fonctions mathématiques plus ou moins simples et connues décrivent les vagues de petite amplitude de façon satisfaisante. Les vagues de grande amplitude et en particulier les vagues déferlantes sont bien plus difficiles à décrire par des solutions analytiques, comme des ellipses ou des polynômes de degré supérieur [7].

### 3.2 - Calcul numérique

#### 3.2.1 - Application numérique des formules

La résolution des problèmes de mécanique, jusqu'à l'avènement des ordinateurs, consistait à trouver la solution des équations de la mécanique sous la forme d'une expression mathématique, puis à l'appliquer



numériquement, par un calcul manuel. Le calcul numérique des formules a été accéléré grâce aux tables, aux abaques ou à des instruments, analogiques comme la règle à calcul, ou digitaux, comme les machines à calculer mécaniques ou électroniques.

### 3.2.2 - Résolution numérique directe des équations de la mécanique

Les ordinateurs peuvent bien sûr être utilisés pour obtenir rapidement les valeurs numériques des formules trouvées par les mécaniciens. Cependant, il n'est pas toujours possible de trouver une formule analytique capable de répondre au problème posé. Et c'est alors que les ordinateurs deviennent intéressants car il existe des méthodes qui permettent de calculer le résultat numérique sans avoir à passer par l'intermédiaire d'une formule.

Les ordinateurs pouvant calculer sans se lasser des millions de fois, sur des millions de chiffres, on peut, au lieu de raisonner sur une formule, travailler directement sur les valeurs numériques, qui peuvent être des résultats de mesure. Le principe de base de ces méthodes, découvert par Newton, est de découper le temps et l'espace en petits morceaux, les différences finies. Cette méthode s'est particulièrement développée depuis quelques décades. Elle a été étendue à l'espace à deux et à trois dimensions découpé en une multitude des formes géométriques élémentaires (triangles ou tétraèdres, rectangles ou parallélépipèdes et même parfois des cercles simulant les atomes). Il existe deux méthodes rivales de calcul des milieux continus, ce sont les différences finies et les éléments finis. La méthode des éléments finis, la plus répandue actuellement, est basée sur la la notion d'énergie et sur le calcul matriciel, les différences finies restant plus proches de la physique car elles utilisent *en général* la notion de force et intègrent directement les équations de la mécanique. A vrai dire la différence entre les deux méthodes n'est pas très claire. Il semblerait que les éléments finis soient une méthode particulière de différences finies.

Comme en mécanique rationnelle, on ramène le problème à une particule fluide, qui, au lieu d'être infiniment petite, a des dimensions et une forme données par avance. C'est, par exemple, un petit cube dans lequel on admet que le fluide a des caractéristiques constantes. La pression en particulier y est supposée constante et égale à la pression moyenne que l'on peut mesurer dans le même volume d'un fluide réel. Les erreurs de calcul seront d'autant plus petites que le cube est plus petit; elles sont de même nature que les erreurs de mesure. On applique les lois physiques à ce petit morceau de fluide et on laisse l'ordinateur répéter le calcul sur chaque morceau. L'ordinateur calcule *numériquement* les forces qui s'exercent entre l'un de ces morceaux de matière et ses voisins à un instant donné et à l'instant suivant, l'intervalle de temps étant généralement constant, par exemple une

microseconde. Le calcul est répété des millions de fois, parfois des milliards de fois, d'un noeud à l'autre et d'un instant à l'autre. Dans certains cas, sur des ordinateurs puissants, on arrive à effectuer le calcul en temps réel, c'est-à-dire que le calcul s'exécute à la cadence même à laquelle le phénomène se déroule dans la nature. Seuls des organismes disposant d'ordinateurs puissants pouvaient jusqu'à présent s'offrir ce genre de calculs. Ils ont été rendus possibles sur les microordinateurs dès que ceux-ci ont disposé de langages de programmation évolués, leur handicap était simplement d'être peu puissants. Actuellement, les microordinateurs commencent à tout se permettre, pour le prix d'une automobile. On pourra bientôt trouver dans le commerce des cartes pouvant être insérées dans les microordinateurs et approchant la vitesse de calcul des gros ordinateurs.

Le problème des vagues pourrait, théoriquement, être résolu en divisant l'Océan (et l'atmosphère) en un très grand nombre de petits cubes de dimensions finies. Ces cubes devraient avoir une dimension de l'ordre du centimètre, ce qui fait un nombre d'éléments nécessaire pour représenter l'océan tout entier aussi important qu'il y a d'atomes dans quelques litres d'eau ! Aucun ordinateur ne peut actuellement et ne pourra sans doute jamais effectuer un tel calcul. On doit donc se contenter de ne calculer le mouvement d'une vague que dans des cas extrêmement simplifiés comme ceux que l'on peut étudier expérimentalement en laboratoire. La simulation numérique du mouvement d'un navire en bassin des carènes correspond à la limite des possibilités des ordinateurs actuels les plus puissants.

## **4 - Caractéristiques de la méthode de calcul**

### **4.1 - Différences finies**

Les formules de différences finies peuvent être très simples: ce sont les équations fondamentales de la mécanique où les  $d$ , représentant les différentielles et les  $\partial$ , représentant les dérivées partielles, sont simplement remplacés par des  $\Delta$ , représentant les différences finies. Le travail de programmation est donc facilité au maximum. Les méthodes plus élaborées, utilisant des développements en séries ou le calcul matriciel, ne peuvent être mises en oeuvre que par des équipes nombreuses.

### **4.2 - Coordonnées de Lagrange**

Les coordonnées de Lagrange, où les mailles suivent le mouvement, conduisent à des formules relativement simples car il n'est pas nécessaire d'introduire les termes supplémentaires que l'on trouve dans les équations de

Navier-Stokes. La figure 5 montre les noeuds du maillage avec l'élément de volume associé auquel on applique les lois de la mécanique.

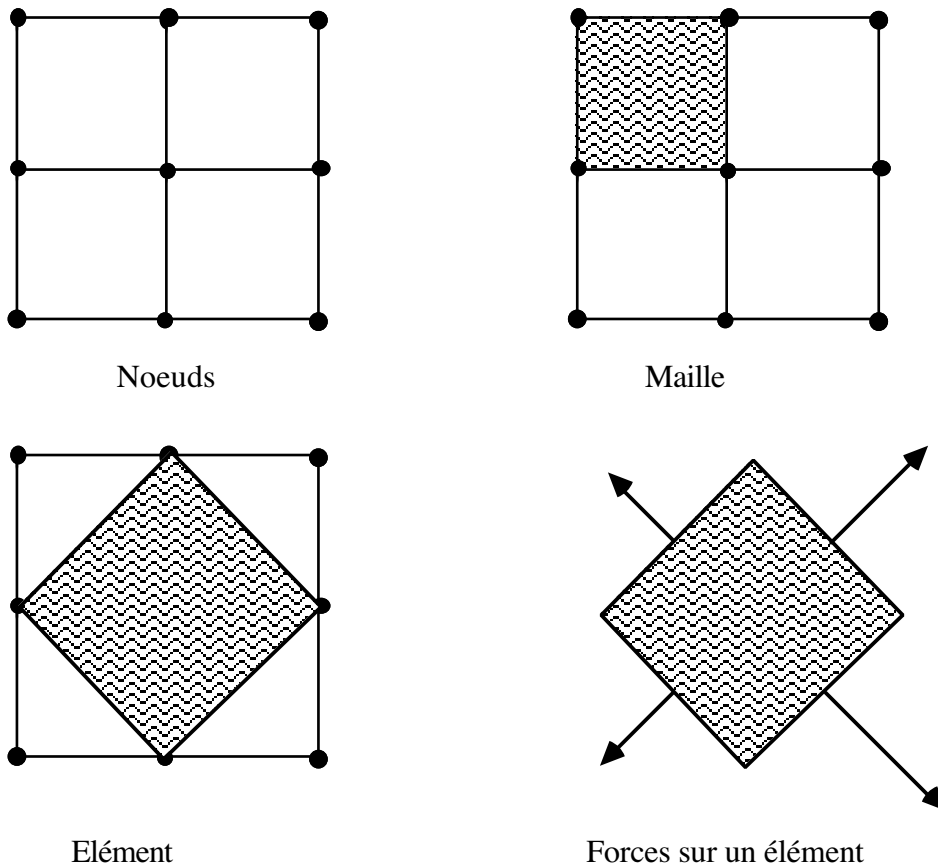


Fig. 5 - Maillage

### 4.3 - Fluide compressible

L'hypothèse habituelle de l'incompressibilité où la variation de volume du liquide lorsqu'il est comprimé est négligée a été remplacée ici par l'approximation inverse, qui consiste à supposer le liquide plus compressible qu'il ne l'est en réalité, dans la mesure où l'influence de cette approximation est négligeable sur les résultats du calcul. En mécanique analytique, lorsqu'on considère un liquide compressible et qu'on a obtenu l'expression mathématique de la formule recherchée, il suffit de remplacer les valeurs littérales par leurs valeurs numériques. Tant qu'à faire, on prendra les valeurs déterminées expérimentalement, le calcul n'est pas plus long. Avec les méthodes utilisant un maillage, au contraire, la durée du calcul est directement proportionnelle à la vitesse du son: c'est le critère de Courant-Friedrichs-Lévy [4,8] qui dit que, pendant un cycle de calcul, les ondes sonores ne doivent pas se propager de plus d'une maille. Grâce à

l'approximation qui consiste à supposer l'eau plus compressible qu'elle ne l'est en réalité, cette méthode de calcul est applicable au mouvement d'une vague dans un délai raisonnable (une journée environ sur Macintosh, une heure sur Macintosh II, pour les calculs présentés ici). Le liquide étant très compressible, la vitesse du son est faible, par exemple le décuple de celle du piston, c'est-à-dire environ le centième de la vitesse réelle du son dans l'eau. Le pas de temps peut être grand et le calcul accéléré en proportion.

#### 4.4 - Equations de base

On part des quelques équations de base de la mécanique, à savoir:

- la conservation de la matière: la masse d'une maille est constante.
- l'équation fondamentale de la dynamique:  $F = m \gamma$ .
- l'égalité de l'action et de la réaction.
- la loi de compressibilité.

##### 4.4.1 Liste des symboles

$c$	: célérité du son ou des ondes longitudinales
$c_v$	: célérité des vagues
$C$	: frontière séparant sur $\Omega'$ la surface libre et la partie interne de $\Sigma'$
$\mathbf{d}$	: vecteur diagonale d'une cellule
$D$	: domaine de l'espace physique
$dl$	: élément linéique
$ds$	: élément de surface
$dv$	: volume élémentaire
$\mathbf{F}$	: force
$\mathbf{g}$	: vecteur pesanteur
$i$	: indice
$K$	: module de compressibilité
$l$	: longueur du côté d'un élément
$m$	: masse d'un élément
$\mathbf{n}$	: vecteur unitaire normal
$p$	: pression
$\mathbf{R}$	: résultante
$t$	: temps
$\mathbf{t}$	: vecteur unitaire tangent
$T$	: tension superficielle
$\mathbf{v}$	: vecteur vitesse

$\mathbf{x}$	: rayon vecteur
$o$	: indique une valeur initiale
$\mathbf{\Gamma}$	: vecteur accélération
$\Delta t$	: pas de temps
$\rho$	: masse spécifique
$\Omega$	: domaine occupé par des particules fluides
$\Omega'$	: domaine occupé par des particules fluides et se trouvant en surface
$\Sigma$	: limite du domaine $\Omega$
$\Sigma'$	: limite du domaine $\Omega'$

#### 4.4.2 Théorie

Considérons (fig. 3) un domaine  $\Omega$ , limité par une surface  $\Sigma$ , occupée par un ensemble de particules fluides que nous suivons dans leur mouvement dans le domaine  $D$  de l'espace physique. Le fluide contenu dans  $\Omega$  se déplace sous l'action des forces volumiques (la pesanteur), des forces surfaciques (la pression) et des forces linéiques (la tension superficielle). Si le domaine  $\Omega$  est à la limite de deux milieux différents, comme  $\Omega'$ , il existe une tension superficielle le long de la frontière  $\Sigma'$  qui sépare l'élément de l'autre milieu. La tension superficielle n'apparaît en tant que force extérieure à l'élément  $\Omega'$  qu'à la limite  $C$  entre les parties interne et superficielle de la frontière  $\Sigma'$ . Les domaines étant petits par hypothèse, on peut supposer que la pression y est constante et négliger la rotation.

Appliquant la loi fondamentale de la dynamique sous sa forme intégrale, on peut écrire:

$$(1) \quad \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{\Gamma} \, dV = \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{g} \, dV - \iint_{\Sigma} p \mathbf{n} \, ds + \int_C T \mathbf{t} \, dl$$

Comme le domaine fluide  $\Omega$  est petit, la densité y est constante et on peut écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{g} - \frac{1}{m} \iint_{\Sigma} p \mathbf{n} \, ds + \frac{1}{m} \int_C T \mathbf{t} \, dl$$

où

$$(3) \quad m = \iiint_{\Omega} \rho \, dv = \text{constante}$$

La connaissance des variables du membre de droite de l'équation permet de calculer le mouvement du centre de gravité du domaine  $\Omega$  par une double quadrature de l'équation (2). Les inconnues sont la pression, reliée à la géométrie par l'équation d'état (pression proportionnelle à la variation de volume) et la tension superficielle, constante en valeur absolue.

#### 4.4.3 - Modèle numérique:

Dans les cellules ou mailles (ici rectangulaires, mais leur forme générale est celle d'un quadrilatère quelconque), la pression est constante. La loi fondamentale de la dynamique est appliquée à l'élément en forme de losange obtenu en joignant les quatre noeuds voisins du noeud considéré. Les noeuds en surface sont doubles, ce qui permet de "contracter" les éléments en surface de façon à éviter un aspect en "escalier". Cette méthode permet de décrire facilement l'effet de la tension superficielle par deux forces s'exerçant sur le double noeud superficiel et égales à la tension superficielle. Il est ainsi inutile de faire intervenir le rayon de courbure.

Le fluide est initialement au repos. A l'instant initial, la pression extérieure et la pesanteur sont appliqués instantanément. La pression est constante sur la surface libre. Le glissement est libre sur les parois du récipient sauf dans les deux coins inférieurs où il y a adhérence.

La pression dans une maille est proportionnelle à sa variation relative d'aire. Or, l'aire d'un quadrilatère étant donnée par le produit vectoriel de ses diagonales, on a:

$$(4) \quad p = -K \left( \frac{\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2}{\mathbf{d}_1^o \times \mathbf{d}_2^o} - 1 \right)$$

L'effort résultant appliqué à un élément est obtenu en additionnant vectoriellement le poids, les forces de pression (normales aux quatre faces) et, éventuellement, de tension superficielle. Les forces  $\mathbf{F}_i$  agissant sur chaque facette d'un élément sont dues à la pression et lui sont donc normales, sauf en surface, où il faut ajouter la tension superficielle.

$$(5) \quad \mathbf{F}_i = -p_i \mathbf{n}_i l_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_i = -p_i \mathbf{n}_i l_i \pm T \mathbf{t}_i$$

La force résultante agissant sur le contour d'un élément est:

$$(6) \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i$$

On en déduit l'accélération en appliquant la loi fondamentale de la dynamique à l'élément associé à un noeud:

$$(7) \quad \Gamma = \frac{R}{m} + g$$

A chaque pas de temps on intègre numériquement, par simples différences finies au premier ordre, l'accélération, pour obtenir la vitesse, puis on intègre la vitesse pour obtenir les nouvelles coordonnées du noeud:

$$(8) \quad \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(t-\Delta t) + \Gamma(t) \Delta t$$

$$(9) \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t-\Delta t) + \mathbf{V}(t) \Delta t$$

## 5 - Résultats issus de la littérature

De nombreuses publications scientifiques ont été faites ces dernières années sur le mouvement des vagues en général et sur les vagues déferlantes en particulier. On a vu précédemment qu'une formule analytique représentant de façon satisfaisante la forme d'une vague déferlante n'avait pas encore été trouvée [7]. Le calcul des vagues déferlantes est toujours d'actualité, aussi bien sous la forme de solutions analytiques que numériques [7,9,10]. La première simulation numérique d'une vague déferlant sur un rivage a pourtant été faite il y a une vingtaine d'années en résolvant directement les équations de Navier-Stokes c'est-à-dire qu'on a simulé le mouvement d'une vague en coordonnées eulériennes [11]. Un calcul de vague déferlante en profondeur infinie sous l'action d'une onde de pression a été effectué il y a quelques années [12]. Pedersen et Gjevik, en Norvège [13], ont effectué en même temps les expériences en laboratoire et le calcul numérique correspondant, basé sur les équations du mouvement des vagues en eau peu profonde, en coordonnées lagrangiennes (fig. 6). Dans leur expérience, la vague est produite par un générateur, mais dans leur calcul, l'onde solitaire a, au départ la forme théorique de la solution de Boussinesq. Leur méthode ne permet pas, par principe, d'obtenir le déferlement car il n'y a pas de maillage dans le sens vertical.

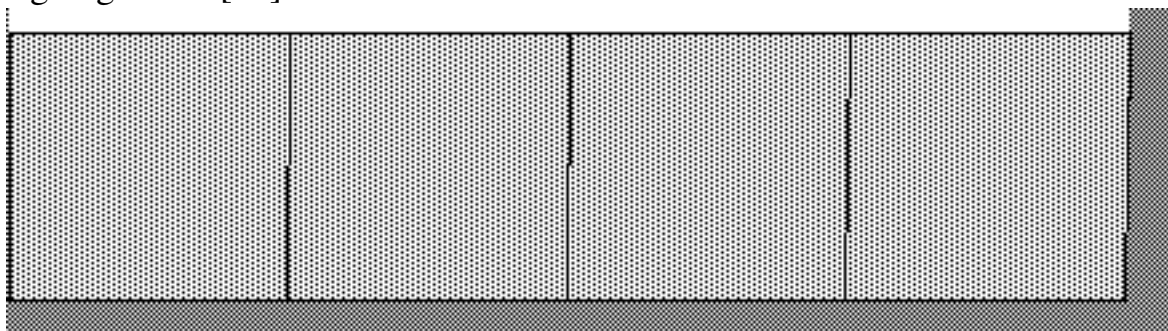
## 6 - Résultat des calculs

### 6.1 - Calcul de démonstration

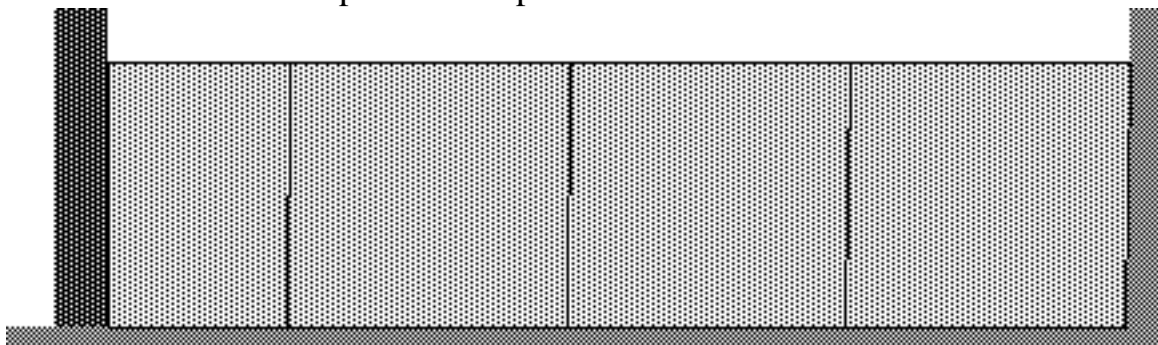
Le calcul est discontinu par définition. Pour obtenir des résultats précis et un mouvement aussi continu que possible, on réduit au maximum les intervalles de temps et la dimension des mailles. Pour visualiser le mécanisme du calcul, on l'a, au contraire, effectué avec des très grosses mailles et des grands pas de temps. On a obtenu un mouvement de grande amplitude en deux cycles de calcul. La figure 7 montre le canal à houle au repos et après le premier cycle de calcul. L'eau de la première maille a été comprimée par le piston, la pression y est élevée. Elle va donc se détendre (fig. 8) vers le haut où elle

peut le faire librement de façon à ce que la pression soit nulle en surface. Evidemment, comme il n'y a qu'une maille dans le sens vertical, cette condition ne pourra être satisfaite que très approximativement. Au cours des cycles suivants, la pression se propagera vers la droite, de maille en maille, à la vitesse du son. Le mécanisme du calcul est tel que la pression ne peut se propager que d'une maille par cycle. Pour que le calcul suive la physique, il faut donc effectuer au moins un cycle de calcul pendant le temps que la pression met à passer d'une maille à l'autre. Si la vitesse du son est supérieure à la vitesse de propagation du calcul, le calcul diverge et l'ordinateur se bloque.

Fig. 6 - Expériences et calculs de Pedersen et Gjevik, en coordonnées lagrangiennes [13].



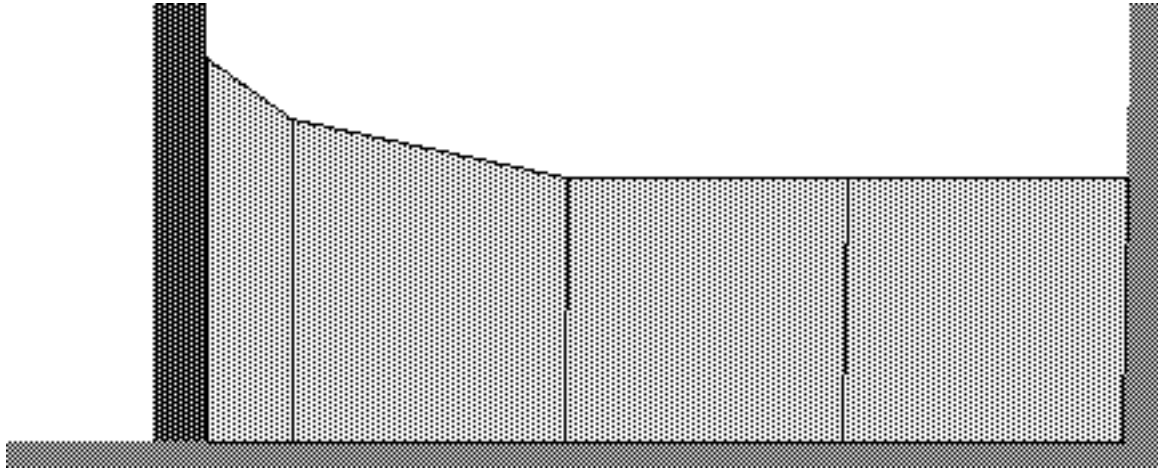
Le canal à houle au départ et au repos



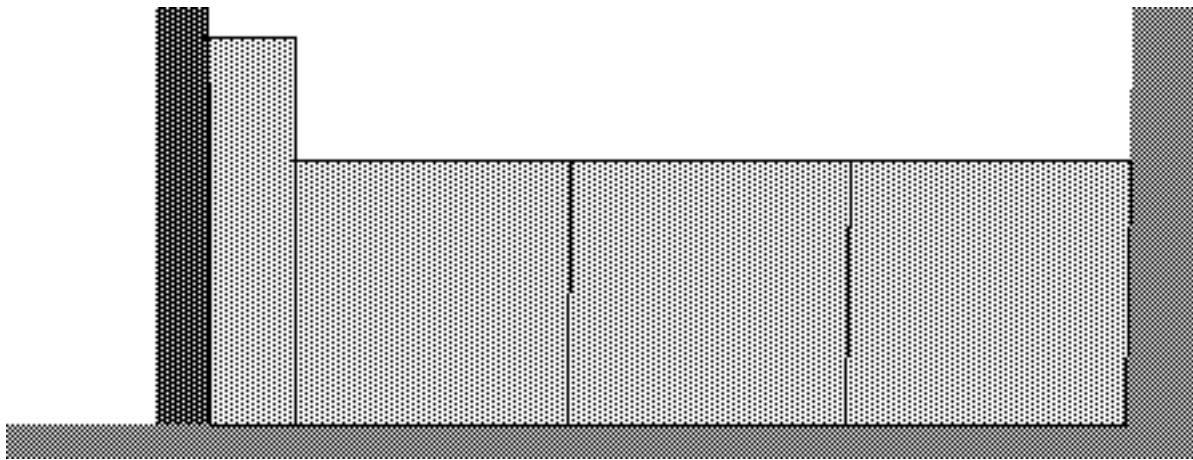
Pendant le premier cycle de calcul, la première maille est comprimée par le piston (à gauche).

Fig. 7 - Visualisation de l'évolution du maillage durant le premier cycle de calcul.





Le maillage tel qu'il apparaît

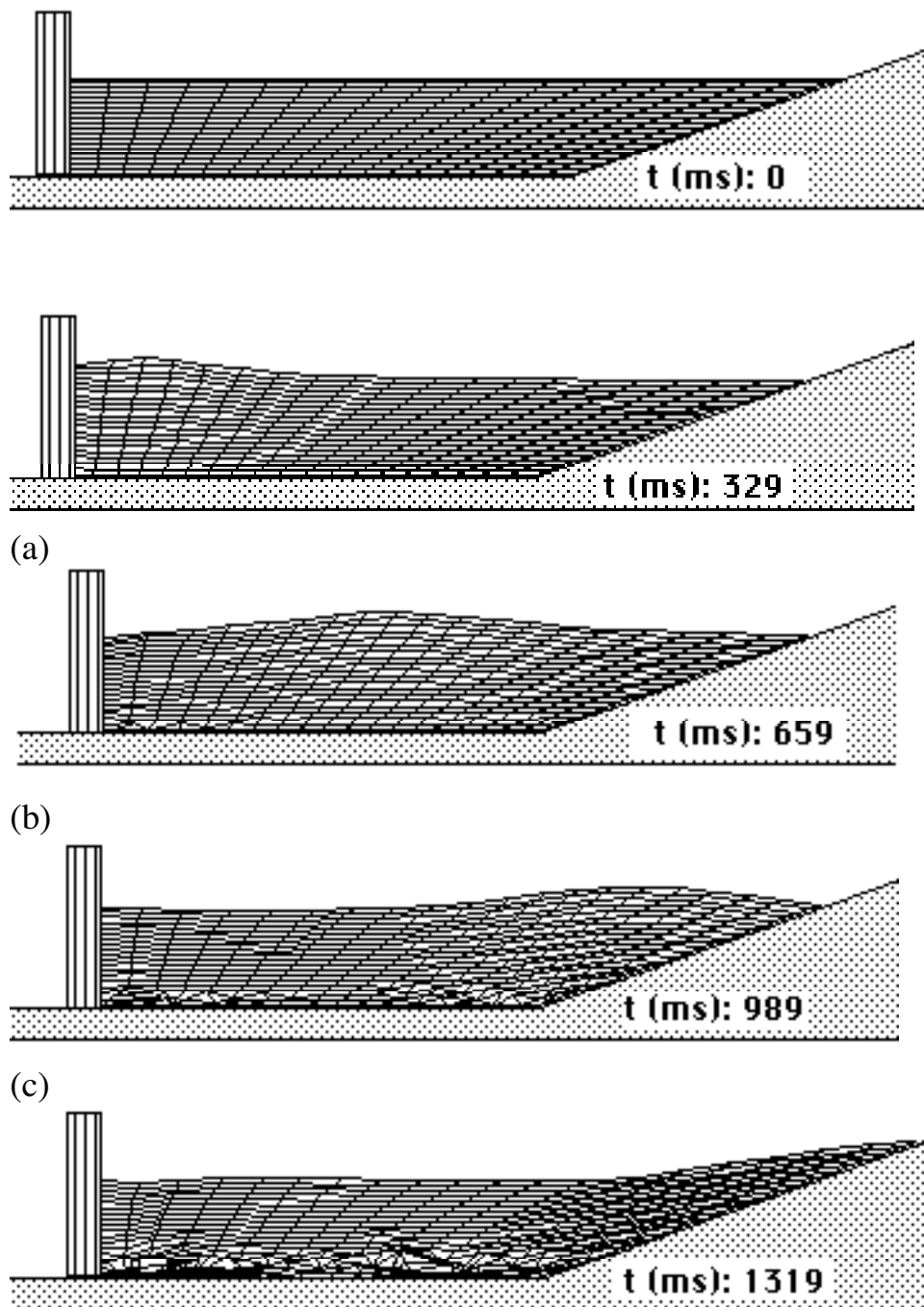


Le maillage tel qu'on aurait également pu le représenter.

Fig. 8 - Déformation du maillage pendant le second cycle de calcul. - La première maille est encore plus déformée, mais elle a profité de la surface libre pour se détendre. La seconde maille n'est pas encore déformée. Elle le sera au prochain cycle.

## 6.2 - Calcul de validation [14]

Pour vérifier la validité de la méthode de calcul, on s'est mis dans les conditions expérimentales de Pedersen et Gjevik (fig. 9). Les résultats du calcul sont quantitativement en accord avec les leurs. Toutefois, le programme a divergé plus tôt que dans leur calcul, c'est-à-dire avant que le ressac ne se produise. Les lettres a,b,c,d sur les figures 6 et 9, qui correspondent aux mêmes instants permettent la comparaison directe des calculs et de l'expérience.



(d)  
 Fig. 9 - Calcul de validation, dans les conditions expérimentales de Pedersen et Gjevik [14]

### 6.3 - Evolution d'une vague déferlante

Le canal à houle a une profondeur de 10 cm et une longueur de 1,6 m. A l'extrémité droite se trouve un amortisseur, c'est-à-dire une plage de pente réglable. A gauche un piston peut se déplacer selon n'importe quelle loi préétablie. On a choisi comme conditions de référence une vitesse constante de 1 m/s pendant 0,5 s. Au démarrage, la vague grimpe le long du piston,

puis elle commence à redescendre. L'eau qui descend tombe sur celle qui se trouve en-dessous en rejaillissant: c'est le déferlement (Fig 10).

#### **6.4 - Influence de la profondeur**

Le calcul a été effectué pour trois profondeurs: 0,1 m, 0,2 m et 0,4 m. La vague ne déferle que lorsque la profondeur est telle que la vitesse du piston atteint la vitesse critique. La vitesse critique est la vitesse maximale à laquelle peut se propager une vague, pour une profondeur donnée. Elle est de un mètre par seconde pour une profondeur de 10 cm, à la base de la vague.

D'après la formule donnant la vitesse critique

$$c_v = \sqrt{g (h + H)}$$

donnée plus haut, la crête se déplace à une vitesse, indépendante de celle du piston, de 41 % supérieure à la vitesse de la base. En effet, la hauteur de la vague est de 10 cm, égale à la profondeur, soit  $h = H$ , ce qui donne un rapport égal à  $\sqrt{2}$  pour les vitesses. Le calcul numérique donne une vitesse du sommet de la vague de 2 m/s, au lieu de 1,41 m/s, égale à celle du piston et indépendante de la profondeur.

Pour une profondeur supérieure, 0,2 m, toujours pour une vitesse du piston de 1 m/s, le jet commence à se former, mais se résorbe ensuite. Pour 0,4 m, la vague se déplace presque d'un bloc, en formant un point anguleux (Fig. 11).

#### **6.5 - Influence de la vitesse du piston**

La crête de la vague se déplace plus vite si le piston a un mouvement rapide (Fig. 12). On constate sur les figures 10 à 12 que, lorsque la hauteur de la vague est importante par rapport à la profondeur, sa vitesse est toujours voisine du double de celle du piston.

### **7 - Réalisation pratique**

#### **7.1 Logiciel**

Le logiciel, baptisé Déform 2D, a été programmé en langage Pascal sur un microordinateur Apple II, à l'origine, puis sur Macintosh. La vitesse moyenne de calcul est de 10 noeuds par seconde. Elle est multipliée par 30 sur un microordinateur équipé d'un microprocesseur 68020 et d'un coprocesseur arithmétique 68881. L'interface utilisateur de Déform 2D, destinée à la communication entre l'ordinateur et l'utilisateur, encore très rudimentaire, est en cours d'élaboration et sera dans le style Macintosh, c'est-à-dire à base de menus déroulants, de fenêtres de dialogue, de souris.

Actuellement, on ne peut changer que les valeurs des paramètres numériques comme la vitesse du piston, la vitesse du son, la viscosité, la tension superficielle et d'autres constantes. On espère, dans un proche avenir pouvoir choisir à volonté la forme géométrique, la nature des conditions aux limites, des conditions initiales et des matériaux (fluides ou solides). La simulation numérique du comportement dynamique de matériaux solides est possible [15], cependant le logiciel n'est pas encore validé complètement pour prendre en compte les efforts tangentiels (module de cisaillement, viscosité...).

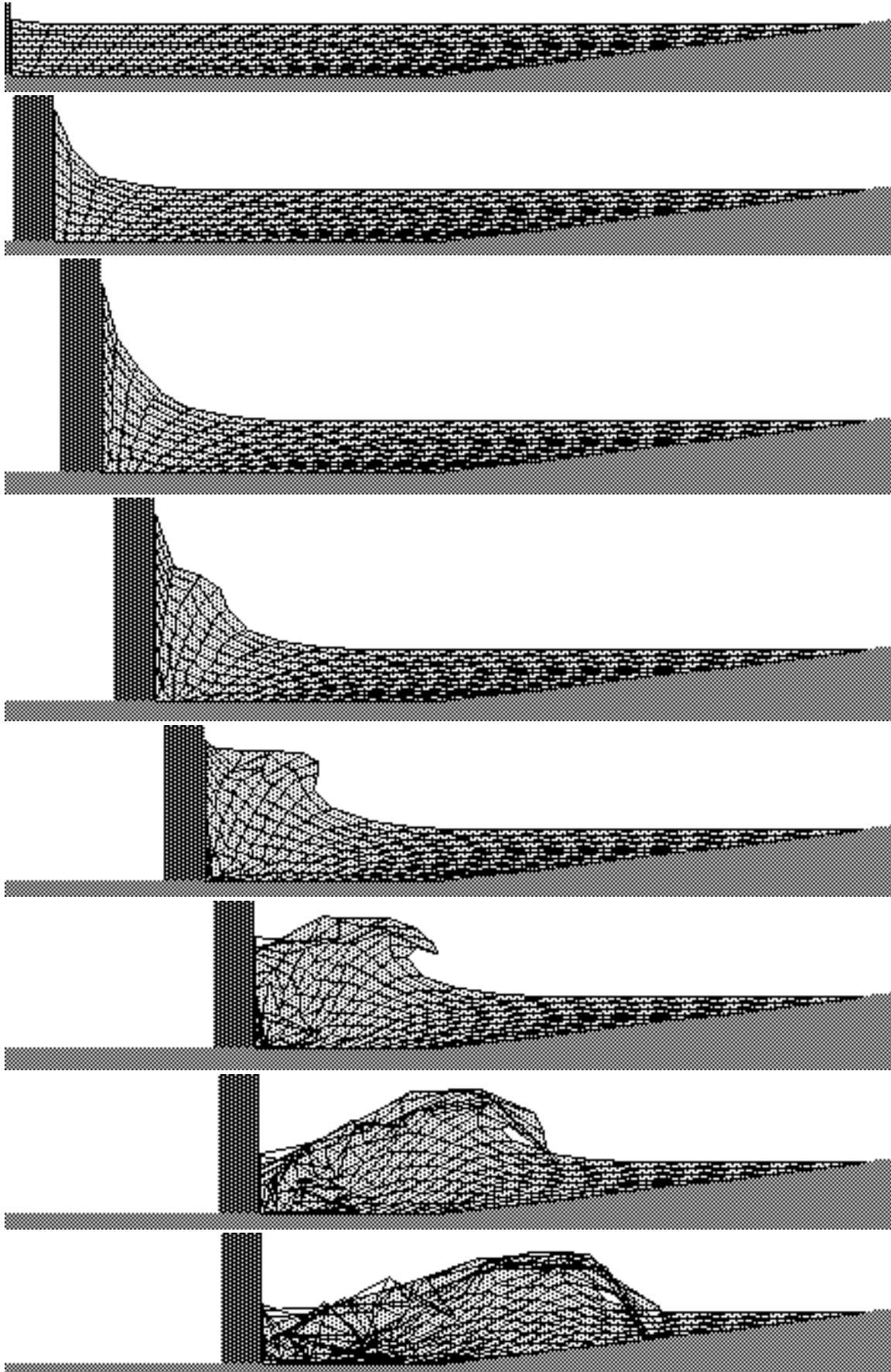
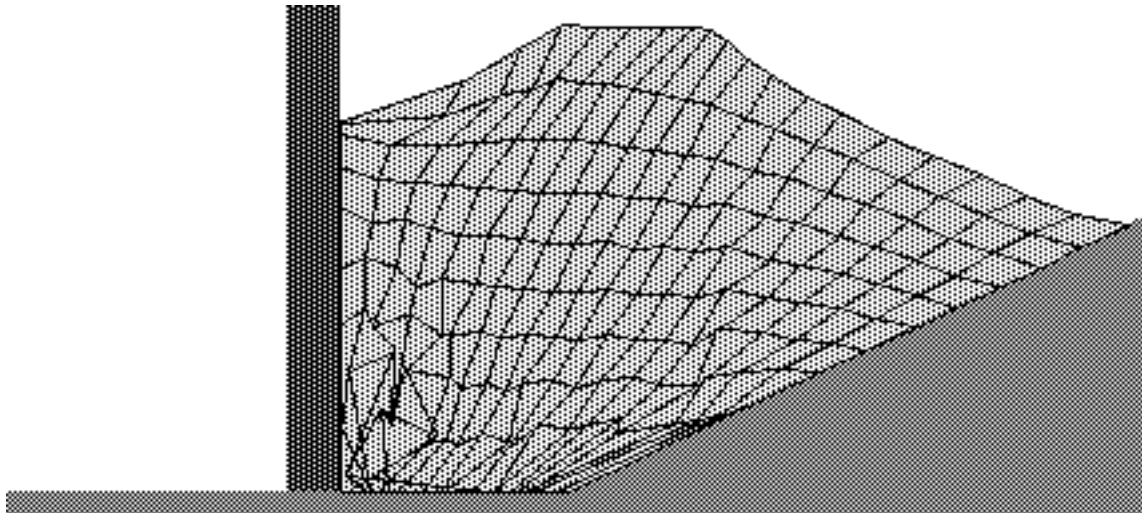
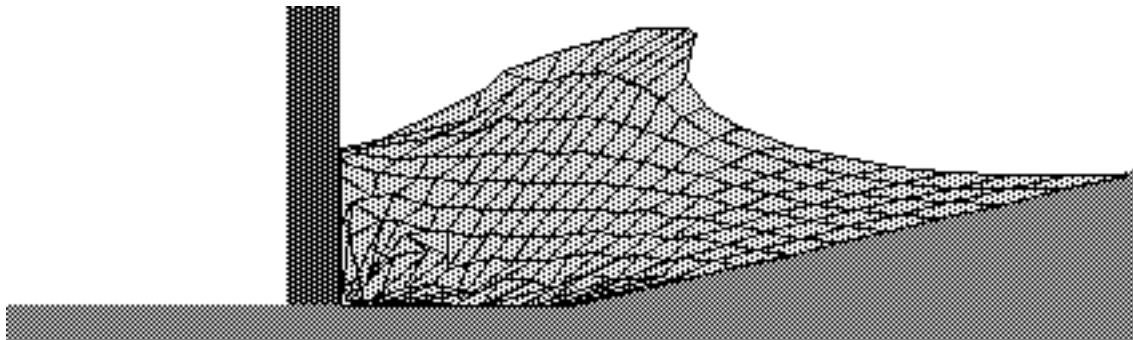


Fig. 10 - Simulation d'une vague déferlante

Profondeur initiale: 0,5 m



Profondeur initiale: 0,2 m



Profondeur initiale: 0,1 m



Fig. 11 - Influence de la profondeur pour un piston se déplaçant à 1 m/s, au même instant,  $t=0,58$  s. Le sommet de la vague se déplace à peu près à la même vitesse (double de celle du piston) dans les trois cas. La base de la vague se propage d'autant plus vite que la profondeur est grande.

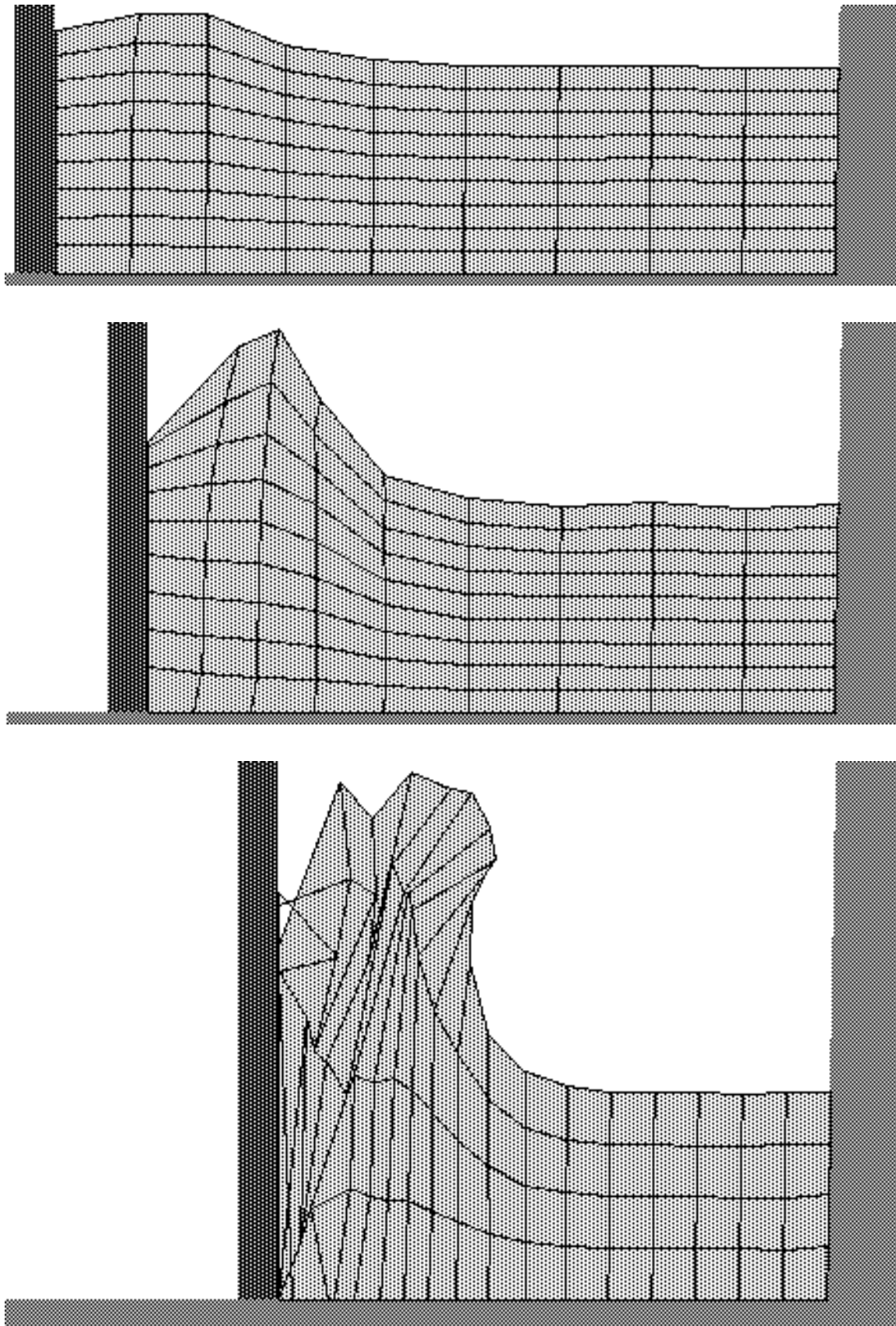


Fig. 12 - Influence de la vitesse du piston (0,1 - 0,5 - 1 m/s) sur celle de la vague, au même instant ( $t= 0,58$  s). Profondeur: 0,1 m, ordonnées dilatées 4 fois. La vitesse de la vague dépend de celle du piston.

## **7.2 - Film**

L'écran du microordinateur a été filmé vue par vue à l'aide d'une caméra Super 8, déclenchée par l'ordinateur, lorsqu'une image était créée sur l'écran par le programme de calcul. On aurait pu filmer l'écran directement lors du calcul, mais, pour des raisons pratiques, on n'a pu procéder exactement de cette façon. En effet, les piles de la caméra se déchargent au bout de quelques heures, ce qui est incompatible avec des durées de calcul pouvant atteindre plusieurs jours. D'autre part, il est nécessaire de stocker les résultats en cas de problème lors de la prise de vues. Dans une première étape, on calcule le mouvement et les résultats sont stockés sur disquette. La capacité d'une disquette étant limitée, seuls les résultats correspondant à des intervalles de 10 ms ont été enregistrés. Le programme reprend ensuite ces résultats et retrace le dessin, qui est alors filmé vue par vue. Chaque vue a été prise en double par la caméra, de façon à obtenir un nombre suffisant d'images pour que la durée du film soit assez longue et qu'on ait le temps de voir le mouvement.

## **8 - Conclusion**

La simulation numérique sur microordinateur du mouvement d'une vague de grande amplitude est possible avec des durées de calcul raisonnables (une journée en moyenne), en baisse constante, grâce aux augmentations continues des performances des microordinateurs. Le programme permet de simuler le déferlement d'une vague, mais il diverge avant qu'un aller et retour complet d'une vague ait pu se produire le long du canal. Autrement dit, les phénomènes périodiques ne sont pas (encore ?) à sa portée. On a constaté que la vitesse de la crête d'une vague de grande amplitude était le double de celle du piston. D'autres problèmes de dynamique des fluides et des solides peuvent être résolus par ce logiciel auquel il manque encore une interface utilisateur pour qu'il soit commercialisable.

## **9. Références**

1. HARVALD S. A., "Physical Models", *Resistance and propulsion of ships*, Wiley Interscience New York 1983.
2. LONGUET-HIGGINS M.S., "The unsolved problem of breaking waves", *Proc. Conf. Coastal Eng., 17th*, 1980, pp. 1-28.
3. LARRAS, J., "*Physique de la Houle et des lames*", Eyrolles, Paris, 1979.



4. NEWELL, A.C., "The History of the Soliton", *J. Appl. Mech.*, n° 50, 1983, p. 1127.
5. BOUTELOUP, J., "*Vagues, marées, courants marins*", Presses Universitaires de France, Paris 1979.
6. WELFORD, L.C., GANABA, T.H., "A finite element method with a hybrid Lagrange line for fluid mechanics problems involving large free surface motion", *Int. J. Num. Methods Eng.*, n° 17, 1981, p. 1201.
7. PEREGRINE D.H., "Breaking Waves on Beaches", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, n° 15, 1983, p. 149.
8. HIRT C.W., "Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations", *J. Comp. Phys.*, n° 2, 1968, p. 339.
9. GREENHOW, M., "Free-surface flows related to breaking waves", *J. Fluid Mech.*, n° 134, 1983, p. 259.
10. NEW A.L., McIVER P. and PEREGRINE D.H., "Computations of overturning waves", *J. Fluid Mech.*, n° 150, 1985, p. 233.
11. FERNBACH, S. and TAUB, A., "*Computers and their Role in the Physical Sciences*", Gordon and Breach, New York 1970.
12. BAKER, G.R., MEIRON D.I. and ORSZAG S.A., "Generalized vortex methods for free-surface flow problems", *J. Fluid Mech.*, n° 123, 1982, p. 477.
13. PEDERSEN G., GJEVIK B., "Run-up of solitary waves", *J. Fluid Mech.*, n° 135, 1983, p. 283.
14. SCHAEFFER B., "A lagrangian 'solid' element method for large amplitude movement of a compressible fluid with free surface", *4th Int. Conf. Num. Meth. Laminar Turbulent Flow*, Swansea 1985.
15. SCHAEFFER B., "Simulation par calcul du comportement dynamique et de la rupture de structures bidimensionnelles", *STRUC-OPT - Optimisation des structures et CAO/DAO*, Paris, 21-24 mars 1988.