

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat doit cocher la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$. L'écriture algébrique de z est :

$$\frac{8}{3} - 2i \qquad -\frac{8}{3} - 2i \qquad \frac{8}{3} + 2i \qquad -\frac{8}{3} + 2i$$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est la droite d'équation :

$$y = x - 1 \qquad y = -x \qquad y = -x + 1 \qquad y = x$$

3. Dans le plan complexe; l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}$

est inclus dans :

La droite d'équation $y = -x$

Le cercle de centre $I(1 + i)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

La droite d'équation $y = x$.

Le cercle de diamètre $[AB]$, A et B étant les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2i$.

CORRECTION

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$. L'écriture algébrique de z est :

Les complexes $\frac{8}{3} - 2i$; $-\frac{8}{3} - 2i$; $\frac{8}{3} + 2i$; $-\frac{8}{3} + 2i$ ont à un signe près la même partie réelle et la même partie imaginaire donc auront le même module.

$$\left|\frac{8}{3} - 2i\right|^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2 = \frac{100}{9}$$

donc pour tous les complexes donnés, on a $|z| = \frac{10}{3}$

$$\text{donc } \bar{z} = 6 + 2i - \frac{10}{3}$$

$$\bar{z} = \frac{8}{3} + 2i \text{ donc } z = \frac{8}{3} - 2i$$

2. 2 justifications sont possibles : l'une rapide (pour un Q.C.M.)

soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $(-i)$

$$|z - 1| = |z + i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

donc M appartient à la médiatrice de $[AB]$

On voit dans un repère orthonormé que c'est la droite $y = -x$.

L'autre, par le calcul :

$$|z - 1| = |z + i| \Leftrightarrow |z - 1|^2 = |z + i|^2$$

$$\Leftrightarrow |(x - 1) + iy|^2 = |x + i(y + 1)|^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -2x = 2y \Leftrightarrow y = -x$$

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2i$.

$$\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} = \frac{z_A - z_M}{z_B - z_M} = \frac{z_{\overline{MA}}}{z_{\overline{MB}}} \text{ donc } \arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) \text{ est une mesure de l'angle } (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}).$$

$$\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \text{le triangle AMB est rectangle en M avec } M \neq A \text{ et } M \neq B$$

Propriété : ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si le sommet de l'angle droit A appartient au cercle de diamètre l'hypoténuse [BC].

le triangle AMB est rectangle en M donc M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.