Pondichéry juin 2009

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées (0, − 2, 5) et D de coordonnées (1, − 5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

CORRECTION

Proposition 1 : $y = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0$ est l'équation d'un plan dans l'espace donc **FAUX.**

Proposition 2 :

Propriété : Pour tout point M du plan, si G est le barycentre de {(A ; a) ; (B ; b) } alors $(a + b)\,\overrightarrow{MG} = a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 4\,\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 3\,\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -3\,\overrightarrow{GM}$.

La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de rapport – 3, de centre G, où G désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}. **FAUX**

Proposition 3 : $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (1, – 1, 3)

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (– 1, – 3, 5)

$\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées (0, – 6, 5)

$\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

$\alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(\alpha - \beta, -\alpha - 3\beta, 3\alpha + 5\beta)$

$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - 3\beta = -6 \\ 3\alpha + 5\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 4\alpha = 6 \\ 8\alpha = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \dfrac{3}{2} \\ \alpha = \dfrac{5}{8} \end{cases}$ ce qui est impossible donc A, B, C et D ne sont pas quatre points coplanaires. **FAUX.**

Proposition 4 : La distance de Ω au plan est égale à $\dfrac{|2 \times 3 + 2 \times 3 + 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 5$ donc la sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$. **VRAI.**