Centres étrangers juin 2007

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe : $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\overline{z} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$, et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = a\,z + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de *f*

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\,z + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$.

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$,

Ill. Deuxième décomposition de *f*

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit D la droite d'équation : $y = x + 2$.

Montrer que pour tout point N appartenant à D, le point f (N) appartient aussi à D.

3. Soit σ la réflexion d'axe D et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

a. Donner l'écriture complexe de σ.

(Indication : on pourra poser $z' = a\,\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)

b. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$.

c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie,

CORRECTION

I. Restitution organisée de connaissances

Si M(z) est invariant par la similitude d'expression complexe $z' = a\,z + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$ alors

$z = a\,z + b$, et donc $(1 - a)\,z = b$, $a \neq 1$ donc $z = \dfrac{b}{1-a}$.

s admet donc un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

II. Première décomposition de *f*

1. g a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ $(a \neq 1)$ donc g est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{2}}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$ soit $\omega = 2 + \mathrm{i}\sqrt{2}$.

$a = 2\,\mathrm{i}\sqrt{2}$ donc le rapport de g est $|\,a\,| = 2\sqrt{2}$, l'angle de g est $\arg a = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit la réflexion d'axe $(O\,;\vec{u})$, l'écriture complexe de s est $z' = \overline{z}$ donc $f = g \circ s$.

Ill. Deuxième décomposition de *f*

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

$f\,(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\overline{z} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow x + \mathrm{i}\,y = \mathrm{i}\sqrt{2}\,(x - \mathrm{i}\,y) + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y - 2 \\ y = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y - 2 \\ y = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}\,y - 2) + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\,y - 2 \\ y = 2\,y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$ et $x = 0 \Leftrightarrow$ le point $\Omega(-2)$ est l'unique point invariant par f.

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{D}$ N a pour affixe $(x + \mathrm{i}(x + 2))$ donc f (N) a pour affixe $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\,(x - \mathrm{i}\,(x + 2)) + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$

soit $z' = x\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 + \mathrm{i}\,[\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,]$ donc $x' = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} - 2$ et $y' = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}$

$x' + 2 = \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2} = y'$ donc $f\,(\mathrm{N}) \in \mathrm{D}$.

3. *a.* σ est une réflexion d'axe D donc l'écriture complexe de σ est de la forme $z' = a\,\overline{z} + b$
Soit A le point d'affixe 2 i et B celui d'affixe – 2, A et B sont deux points distincts de D donc σ(A) = A et σ(B) = B

donc $\begin{cases} 2\,\mathrm{i} = -2\,\mathrm{i}\,a + b \\ -2 = -2\,a + b \end{cases}$, par différence membre à membre, 2 i + 2 = a (2 – 2 i) donc $a = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$,

En remplaçant a par i dans – 2 = – 2 a + b, b = – 2 + 2 i
l'écriture complexe de σ est de la forme $z' = \mathrm{i}\,\overline{z} - 2 + 2\,\mathrm{i}$.

b. $k = f \circ \sigma$ donc l'écriture complexe de k est : $z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\,[\,\overline{\mathrm{i}\,\overline{z} - 2 + 2\,\mathrm{i}}\,] + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2 = \mathrm{i}\sqrt{2}\,[-\mathrm{i}\,z - 2 - 2\,\mathrm{i}\,] + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$

donc $z' = \sqrt{2}\,z - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i} + 2\sqrt{2} + 2\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2$ soit l'écriture complexe de k est $z' = \sqrt{2}\,z + 2\sqrt{2} - 2$.

c. l'écriture complexe de k est de la forme $z' = a\,z + b$ avec k réel non nul donc k est une homothétie de rapport $a = \sqrt{2}$

le centre de l'homothétie k est le point invariant par k, $z' = z \Leftrightarrow z = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{1-\sqrt{2}} = -2$ on trouve $z' = -2$ donc $k(\Omega) = \Omega$,

k est une homothétie de centre Ω.de rapport $\sqrt{2}$.

4. σ o σ = Id et $k = f$ o σ donc $f = k$ o σ.