Pondichéry avril 2010

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Si pour tout $t \in [a, b]$ $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Montrer que : si, pour tout t de $[a ; b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1\. *a*. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

(Pour le calcul de I_1, on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.)

2\. *a*. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \ln 2$.

b. Étudier les variations de la suite (I_n).

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3\. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1 + x) - x$,.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$.

Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a $\ln(1 + x^n) \leq x^n$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

CORRECTION

Partie A : Restitution organisée de connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a ; b]$

Pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geq 0$ donc $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$

$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$

donc $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ soit $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B

1\. *a*. Pour tout x de $[0, +\infty[$ $f_1(x) = \ln(1 + x)$

Soit $\mathrm{X} = 1 + x$, $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$

$f_1(x) = \ln \mathrm{X}$ or $\lim_{\mathrm{X} \to +\infty} \ln \mathrm{X} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

b. f_1 est la composée de deux fonctions continues et dérivables sur $[0, +\infty[$: $x \to 1 + x$ et $x \to \ln x$ donc f_1 est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

$f'_1(x) = \frac{1}{x+1}$ donc pour tout x de $[0, +\infty[$ $f'_1(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

c. Soit : $u'(x) = 1$ $\quad u(x) = x + 1$

$v(x) = \ln(1 + x)$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x+1}$

u et v sont continues et dérivables sur $[0, +\infty[$ donc $\mathrm{I}_1 = \left[u(x)\ v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_1 = \left[(x+1)\ \ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{I}_1 = \left[(x+1)\ \ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{I}_1 = \left[(x+1)\ \ln(x+1)\right]_0^1 - [\,x\,]_0^1$

$\mathrm{I}_1 = 2\ln 2 - 1$

$f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc f_1 est positive sur $[0 ; 1]$

f_1 est continue sur $[0 ; 1]$ donc I_1 est l'aire (en unité d'aires) du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et la courbe de f_1.

2\. *a*. pour tout entier naturel non nul n, f_n est la composée de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$: $x \to 1 + x^n$ et $x \to \ln x$ donc f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

pour tout x de $[0 ; 1]$, $0 \leq x^n \leq 1$ donc $1 \leq 1 + x^n \leq 2$

la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc $\ln 1 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln 2$

La fonction f_n est continue sur [0, 1] et pour tout x de [0, 1] $0 \leq f_n(x) \leq \ln 2$
donc pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \ln 2 \, dx$ soit $0 \leq I_n \leq \ln 2$

b. Pour tout x de [0, 1] $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ donc $1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$
la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur] 0, + ∞ [donc $\ln 1 \leq \ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$ soit $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$
Les fonctions f_{n+1} et f_n sont continues sur [0, 1] et pour tout x de [0, 1] : $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ donc $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$
La suite (I_n) est décroissante minorée par 0.

c. La suite (I_n) est décroissante minorée par 0 donc est convergente.

3. *a*. g est la différence de deux fonctions continues dérivables sur [0, + ∞ [: $x \to x$ et $x \to f_1(x)$ donc g est continue et dérivable sur [0, + ∞ [et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$
Pour tout $x > 0$, $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$ donc g est strictement décroissante sur [0, + ∞ [.

b. g est strictement décroissante sur [0, + ∞ [et $g(0) = 0$ donc g est strictement négative sur [0, + ∞ [.
Si x est un réel positif alors pour tout entier naturel n non nul, x^n est un réel positif donc $g(x^n) \leq 0$ donc pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a : $\ln(1 + x^n) - x^n \leq 0$ soit $\ln(1 + x^n) \leq x^n$.

c. Les fonctions f_n et $x \to x^n$ sont continues sur [0, + ∞ [et pour tout x de [0, + ∞ [on a : $0 \leq \ln(1 + x^n) \leq x^n$.
donc $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$ donc $0 \leq I_n \leq \left[\dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$ soit $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$