Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$,

$$f'(x)=\frac{1}{x\,(x+1)^2}.$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par :

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}-\ln n\,.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u+\frac{1}{i}$,
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632

n	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}-\ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1}-u_n=f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie **A**.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. *a.* Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\geq 0$

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{k}$

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1)-\ln k\leq\dfrac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1)\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n\geq 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

CORRECTION

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ (rapport des termes de plus haut degré)

La fonction logarithme népérien est continue sur] 0 ; + ∞ [donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. $x \geq 1$, donc $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln x - \ln(x+1)$

Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; + ∞ [, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-x + x^2 + 2x + 1 - x^2 - x}{x(x+1)^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Sur [1 ; + ∞ [, $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur [1 ; + ∞ [.

3. f strictement croissante sur [1 ; + ∞ [, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc f est strictement négative sur [1 ; + ∞ [.

Partie B

1.

Variables :	i	u
Initialisation :		0
Etape 1	1	$0 + \dfrac{1}{1} = 1$
Etape 2	2	$1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$
Etape 3	3	$\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$

2.

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. | Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$, Affecter à u la valeur $u - \ln(n)$.
Sortie :	Afficher u

3. D'après le tableau, la suite (u_n) semble être décroissante, peut-être convergente mais il est impossible de donner la valeur exacte de la limite.

Partie C

1. pour tout entier strictement positif n, $u_{n+1} - u_n =$

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n\right)$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = f(n)$

f est strictement négative sur [1 ; + ∞ [donc pour tout entier strictement positif n, $_{n+1} - u_n < 0$

La suite (u_n) est décroissante.

2. *a.* Soit k un entier strictement positif. Si $k \leq x \leq k + 1$, alors $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{k+1}$ donc $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x} \geq 0$

La fonction $x \to \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x}$ est continue sur [1 ; + ∞ [et $k < k + 1$ donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geq 0$

$$\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k}\int_k^{k+1}1\,\mathrm{d}x-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k}(k+1-1) \geq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

soit $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ \ln x\ ]_k^{k+1} = \ln(k+1)-\ln k$ donc $\ln(k+1)-\ln k \leq \dfrac{1}{k}$

b.

$$\begin{array}{llcll}
\text{Si } k=1 & \ln 2 & - & \ln 1 & \leq 1 \\
\text{Si } k=2 & \ln 3 & - & \ln 2 & \leq \dfrac{1}{2} \\
\text{Si } k=3 & \ln 4 & - & \ln 3 & \leq \dfrac{1}{3} \\
\quad\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\text{Si } k=n-1 & \ln n & - & \ln(n-1) & \leq \dfrac{1}{n-1} \\
\text{Si } k=n & \ln(n+1) & - & \ln n & \leq \dfrac{1}{n}
\end{array}$$

Par addition terme à terme :

$(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\dots+(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n) \leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}$

donc après simplification : $\ln(n+1) \leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}$

c. $\ln(n+1) \leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}$ et $\ln n \leq \ln(n+1)$ donc

$\ln n \leq 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}$ soit $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}-\ln n \geq 0$

Pour tout entier strictement positif n, $u_n \geq 0$.

3. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc est convergente.