On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (c'est à dire autres que lui-même).

Partie A :

1. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.

b. Vérifier que ces deux nombres peuvent s'écrire sous la forme $2^n (2^{n+1} - 1)$ où $2^{n+1} - 1$ est premier.

3. Soit p un nombre premier et a le nombre $a = 2^n p$

a. Quels sont les diviseurs propres de a ? Calculer leur somme en fonction de n et p.

b. Supposons de plus que $p = 2^{n+1} - 1$. Exprimer la somme des diviseurs propres de a en fonction de n.

c. En déduire que a est parfait.

4. Énoncer le résultat démontré, donner deux autres nombres parfaits.

Partie B :

1. Soit a un nombre pair. Montrer que l'on peut écrire a sous la forme $2^n b$ où b est impair.

2. On note $s(a)$ la somme de tous les diviseurs positifs de a.

a. Montrer que $s(a) = (2^{n+1} - 1)\, s(b)$. (On pourra noter $d_1, d_2, ..., d_p$ les diviseurs de b et exprimer les diviseurs de a en fonction de b).

b. A quelle condition sur $s(a)$, a est-il un nombre parfait ?

3. Montrer que cette condition est équivalente à : $b = (s(b) - b)\,(2^{n+1} - 1)$.

4. En déduire que $s(b) - b$ est un diviseur de b.

5. De $s(b) = b + (s(b) - b)$, déduire que b est premier puis que $b = 2^{n+1} - 1$.

6. Conclure.

CORRECTION

Partie A :

1. Les diviseurs propres de 6 sont 1 ; 2 ; 3 or $1 + 2 + 3 = 6$ donc 6 est un nombre parfait.

Les diviseurs propres de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 or $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ donc 28 est un nombre parfait.

b. $6 = 2 \times 3 = 2^1 (2^2 - 1)$ et $2^2 - 1 = 3$ est premier

$28 = 2^2 \times (2^3 - 1)$ et $2^3 - 1 = 7$ est un nombre premier

Ces deux nombres peuvent s'écrire sous la forme $2^n (2^{n+1} - 1)$ où $2^{n+1} - 1$ est premier.

3. Soit p un nombre premier et a le nombre $a = 2^n p$

a. Les diviseurs propres de a sont de la forme $2^k p^m$ où $0 \le k \le n$ et $0 \le m \le 1$ et $(k\,;\,m) \ne (n\,;\,1)$

Leur somme est égale à $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + p\,(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = 2^{n+1} - 1 + p\,(2^n - 1)$

b. Si $p = 2^{n+1} - 1$ alors la somme des diviseurs propres de a est égale à $2^{n+1} - 1 + (2^{n+1} - 1)(2^n - 1) = (2^{n+1} - 1)(1 + 2^n - 1)$ soit $(2^{n+1} - 1)\, 2^n$

c. Si $p = 2^{n+1} - 1$, alors la somme des diviseurs propres de a est égale à $(2^{n+1} - 1)\, 2^n$ soit $2^n p$ donc est égale à a donc a est parfait.

4. Si un entier peut se mettre sous la forme $(2^{n+1} - 1)\, 2^n$ et que $(2^{n+1} - 1)$ est un nombre premier alors ce nombre est parfait.

n	2	3	4	5	6
$2^{n+1} - 1$	7	15	31	63	127
Premier ?	oui	non	oui	non	oui
Nombre parfait	28		496		8128

Si $n = 4$, $a = 496$ et si $n = 6$, $a = 8128$ sont des nombres parfaits

Partie B :

1. Soit a un nombre pair. Montrer que l'on peut écrire a sous la forme $2^n b$ où b est impair.

a est un nombre pair donc a est divisible par 2.

Dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a, a s'écrit $2^n \times p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_k^{\alpha_k}$ où $p_1, p_2 \dots p_k$ sont des nombres premiers distincts de 2 (donc impairs) et n, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ des entiers naturels non nuls donc a peut s'écrire sous la forme $2^n b$ où $b = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_k^{\alpha_k}$ est impair.

2. *a*. Soit $1, d_1, d_2, \dots, d_p, b$ les diviseurs de b $(1 < d_1 < \dots < d_p < b)$

Les diviseurs de a sont de la forme $2^m d_k$ où d_k est un diviseur de b avec $(0 \le m \le n$ et $1 \le k \le p)$.

donc $s(a) = 1 + 2 + \dots + 2^n + (1 + 2 + \dots 2^n)\, d_1 + \dots + (1 + 2 + \dots 2^n)\, d_p + (1 + 2 + \dots 2^n)\, b$

$s(a) = (2^{n+1} - 1)(1 + d_1 + \dots d_{p-1} + d_p + b)$

$s(a) = (2^{n+1} - 1)\, s(b)$

b. a est un nombre parfait $\Leftrightarrow s(a) - a = a \Leftrightarrow s(a) = 2a$

3. $(s(b) - b)(2^{n+1} - 1) = (2^{n+1} - 1)\, s(b) - (2^{n+1} - 1)\, b \Leftrightarrow (s(b) - b)(2^{n+1} - 1) = s(a) - 2^{n+1} b + b$
$\Leftrightarrow (s(b) - b)(2^{n+1} - 1) = s(a) - 2a + b$
a est un nombre parfait $\Leftrightarrow s(a) = 2a \Leftrightarrow \Leftrightarrow (s(b) - b)(2^{n+1} - 1) = 2a - 2a + b \Leftrightarrow b = (s(b) - b)(2^{n+1} - 1)$.

4. $b = (s(b) - b)(2^{n+1} - 1)$ et $2^{n+1} - 1 \in \mathbb{N}$ donc $s(b) - b$ est un diviseur de b.

5. $s(b) = b + (s(b) - b)$, or $b = (s(b) - b)(2^{n+1} - 1)$ donc $s(b) = (s(b) - b)\, 2^{n+1}$
$s(b) - b$ est un diviseur de b donc $s(b) - b$ figure dans la liste 1, d_1, d_2 … d_k, b des diviseurs de b.
$s(b) = 1 + d_1 + d_2 \dots d_k + b$ donc $1 + d_1 + d_2 \dots d_k = s(b) - b$

$s(b) - b$ figure dans la liste $\{1, d_1, d_2 \dots d_k, b\}$ des diviseurs de b donc on a trois cas :

- <u>$s(b) - b \neq 1$ et $s(b) - b \neq b$</u>
  Supposons que $s(b) - b = d_i$ ($d_i \neq 1$) alors $d_i = 1 + d_1 + d_2 \dots d_{i-1} + d_i + d_{i+1} + \dots d_k$
  soit $1 + d_1 + d_2 \dots d_{i-1} + d_{i+1} + \dots d_k = 0$ ce qui est absurde puisque tous les diviseurs sont des nombres strictement positifs donc leur somme est non nulle,
- <u>$s(b) - b = b$</u>
  En multipliant les deux termes de la relation $s(b) - b = b$
  par $(2^{n+1} - 1)$: $(s(b) - b)(2^{n+1} - 1) = b\,(2^{n+1} - 1)$ comme $b = (s(b) - b)(2^{n+1} - 1)$ donc a : $b = b\,(2^{n+1} - 1)$ soit $b = 0$ (exclu car b est impair) soit $2^{n+1} - 1 = 1$ donc $2^{n+1} = 2$ soit $n = 0$ donc $a = 2^n b = b$ ce qui est absurde car est pair et b impair
- La seule possibilité est le troisième cas $s(b) - b = 1$ soit $s(b) = 1 + b$ donc b est un nombre premier (ses seuls diviseurs sont 1 et b) donc $b = 2^{n+1} - 1$.

6. Tout nombre parfait pair est de la forme $2^n (2^{n+1} - 1)$ où $2^{n+1} - 1$ est un nombre premier.