

Chronique 7

Graphes

Tout comme pour les arbres, \LaTeX est très adapté pour la construction de graphes. L'indispensable package `ps-tricks-add` est nécessaire pour tracer les graphes de cette chronique.

7.1 Le principe

Un graphe est constitué de sommets, qui sont reliés entre eux par des arcs, orientés ou non. Sur ces arcs, on peut écrire des légendes qui, dans le cadre de graphes probabilistes, représentent des probabilités de changement d'état.

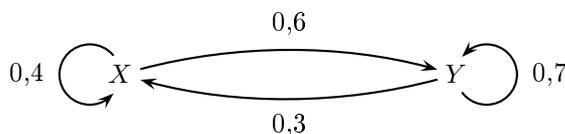
On va donc voir quelques façons de définir et de nommer des sommets que l'on appelle aussi parfois des nœuds (`nodes`) ; on verra également comment tracer des arcs orientés ou des segments reliant ces sommets, et enfin comment écrire des probabilités le long des arcs.

On pourrait tout faire en utilisant les outils que l'on a déjà vus pour tracer des figures de géométrie : `\dots`, `\psline` ou `\psarc` ; mais dans ce cas-là, il faudrait gérer soi-même les coordonnées des points, les rayons des arcs, etc.

Il y a beaucoup mieux avec des outils plus spécifiques que l'on pourra d'ailleurs utiliser dans d'autres circonstances.

7.2 Un premier graphe

On commence par un graphe probabiliste à deux états :



7.2.1 Les sommets

En \LaTeX , il y a deux façons de définir des sommets : avec ou sans coordonnées. Pour ce premier graphe qui est dessiné horizontalement (il faut que ce soit comme ça !), on va utiliser des sommets définis sans coordonnées (inutiles ici).

L'instruction que j'ai utilisée est `\Rnode`. Il existe une instruction qui ressemble beaucoup à celle-ci qui est `\rnode` et qui semble donner les mêmes résultats. Attention, elle peut provoquer certains décalages horizontaux parfois ; je privilégie donc `\Rnode`, avec un `R` majuscule.

L'instruction `\Rnode` a besoin de deux paramètres (plus éventuellement d'autres optionnels que l'on entrera entre crochets); le premier paramètre est le nom que portera le sommet dans le dessin du graphe (il doit commencer par une lettre et ne comporter que des lettres non accentuées et des chiffres), le second paramètre est ce qui va être affiché dans le graphe.

Ainsi `\Rnode{X}{X}` sera un sommet du graphe qui sera affiché X (donc X en mode mathématique) et qui portera le nom X ; c'est-à-dire qu'on pourra tracer un arc partant de X ou arrivant à X en faisant référence à ce sommet par son nom X .

On va définir ainsi deux sommets, séparés par une distance de 4 cm; j'ai utilisé pour ça l'instruction `\hskip 4cm`. Attention, mettre 4 cm entre accolades provoque une erreur.

Pour définir les deux sommets X et Y , on écrira donc :

```
\Rnode{X}{X} \hskip 4cm \Rnode{Y}{Y}
```

7.2.2 Les arcs

L'instruction qui permet de tracer un arc est `\ncarc`; et comme on a nommé les sommets X et Y , pour tracer un arc entre X et Y , il suffit d'écrire : `\ncarc{X}{Y}`

Si on souhaite que l'arc soit orienté de X vers Y , on écrira : `\ncarc{->}{X}{Y}`

Mais si on se contente de :

```
\Rnode{X}{X} \hskip 4cm \Rnode{Y}{Y} % création des sommets
\nccarc{->}{X}{Y} % arc orienté de X vers Y
\nccarc{->}{Y}{X} % arc orienté de Y vers X
```

on obtient : $X \rightleftarrows Y$ ce qui est très vilain!

On va donc :

- éloigner un peu les arcs du nom des sommets en entrant `nodesep=3pt`;
- augmenter un peu la courbure de l'arc en entrant `arcangle=15`. La variable `arcangle` désigne l'angle en degrés entre le départ de l'arc et la ligne droite entre les deux sommets;
- agrandir un peu les flèches en entrant `arrowsize=2pt 3`.

Comme ces options doivent s'appliquer à chaque arc tracé, on les définira au moyen d'un `\psset` :

```
\psset{nodesep=3pt,arcangle=15,arrowsize=2pt 3}
```

Pour une option qui ne serait à appliquer que pour un seul arc, on l'entrerait localement; ainsi si on veut dessiner l'arc qui va de X vers Y en rouge, on écrira : `\ncarc[linecolor=red]{->}{X}{Y}`.

7.2.3 Les probabilités

Il ne reste plus qu'à mettre des poids sur les arcs; là encore il y a plusieurs possibilités.

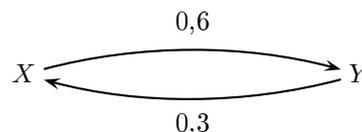
J'ai utilisé l'instruction `\Aput`.

La documentation de `pst-node` dit que le `A` signifie `Above` donc `au-dessus`; il existe aussi `\Bput` avec `B` pour `Below` donc `en dessous`. C'est à voir...

Ainsi :

```
\Rnode{X}{X} \hskip 4cm \Rnode{Y}{Y}
\psset{nodesep=3pt,arcangle=15,arrowsize=2pt 3}
\nccarc{->}{X}{Y} \Aput{0,6}
\nccarc{->}{Y}{X} \Aput{0,3}
```

donne :



On ne peut pas dire que le 0,3 de `\Aput{0,3}` soit situé au dessus de l'arc!

La distance entre la légende et l'arc peut être modifiée en entrant en option la distance souhaitée comme dans `\Aput[1pt]{0,3}`.

7.2.4 Les boucles

Il reste les boucles à tracer au moyen de `\nccircle` qui nécessite deux paramètres obligatoires et peut en avoir des optionnels.

L'instruction `\nccircle` dessine un cercle ou une partie de cercle qui passerait, s'il était entier, par le centre du sommet. Le premier paramètre est le nom du sommet, le second paramètre est le rayon du cercle. Enfin on peut orienter le cercle ou pas :

<pre>\Rnode{X}{X\$X\$} \nccircle{X}{0.5cm}</pre>	<pre>\Rnode{X}{X\$X\$} \nccircle{->}{X}{0.5cm}</pre>	<pre>\Rnode{X}{X\$X\$} \nccircle{<-}{X}{0.5cm}</pre>

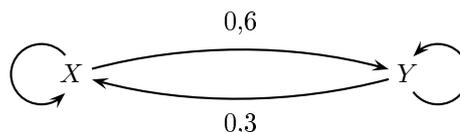
Les paramètres optionnels permettent, entre autres, de faire démarrer le cercle vers la gauche, le bas ou la droite au lieu de le faire démarrer vers le haut ; il faut modifier la valeur de la variable `angleA` qui est à 0 par défaut :

<pre>\Rnode{X}{X\$X\$} \nccircle[angleA=90] {->}{X}{0.5cm}</pre>	<pre>\Rnode{X}{X\$X\$} \nccircle[angleA=180] {->}{X}{0.5cm}</pre>	<pre>\Rnode{X}{X\$X\$} \nccircle[angleA=-90] {->}{X}{0.5cm}</pre>

La variable `angleA` désigne l'angle que fait l'arc avec l'horizontale au départ du premier sommet. Il existe de même la variable `angleB` qui désigne l'angle que fait l'arc avec l'horizontale à l'arrivée sur le second sommet (quand l'arc va d'un sommet à un autre). La variable `angleA` fait invariablement référence au premier sommet, ou au sommet s'il n'y en a qu'un, tandis que `angleB` fait toujours référence au second sommet, quels que soient les noms des sommets.

On en reparlera plus loin.

À ce stade, on sait faire ce diagramme :



7.2.5 Le code

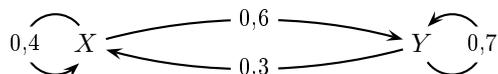
Il ne reste que les probabilités à écrire sur les boucles ; pour être honnête, j'ai essayé `\Aput` et `\Bput` et j'ai vu que c'était `\Bput` qu'il fallait utiliser !

Voici donc le code du diagramme de la page 35 :

```
\Rnode{X}{X$X$} \hspace 4cm \Rnode{Y}{Y$Y$}           % définition des sommets
\psset{nodesep=3pt,arcangle=15,arrowsize=2pt 3}      % différents paramètres
\ncarc{->}{X}{Y}                                     \Aput{0,6}   % arc pondéré de X vers Y
\ncarc{->}{Y}{X}                                     \Aput{0,3}   % arc pondéré de Y vers X
\nccircle[angleA=90]{->}{X}{.4cm} \Bput{0,4}        % boucle autour de X
\nccircle[angleA=-90]{->}{Y}{.4cm} \Bput{0,7}        % boucle autour de Y
```

7.2.6 Variante

Légère variante du diagramme précédent :



Pour écrire les probabilités au milieu des arcs, il suffit de remplacer partout `\Aput` et `\Bput` par `\mput*` (essayez sans l'étoile!). J'ai également écrit les probabilités en un peu plus petit en entrant `\mput*{\small ...}` à la place de `\mput*{...}`.

7.2.7 Placement des diagrammes

Pour placer exactement où l'on veut les graphes dans la page, je vous conseille d'insérer le code du graphe dans un environnement `pspicture` en ajustant `xmin`, `ymin`, `xmax` et `ymax` pour que le graphe complet soit contenu dans la zone ainsi définie.

Le code du graphe de la page 35 est en fait :

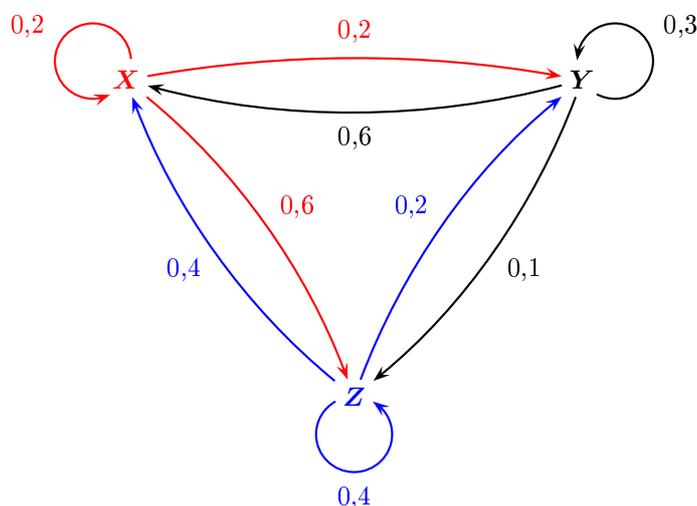
```

\begin{pspicture}(-2,-1)(6,1.5)           % zone de tracé du graphe
\Rnode{X}{X} \hskip 4cm \Rnode{Y}{Y}     % définition des sommets
\psset{nodesep=3pt,arcangle=15,arrowsize=2pt 3} % différents paramètres
\ncarc{->}{X}{Y}                        \Aput{0,6} % arc pondéré de X vers Y
\ncarc{->}{Y}{X}                        \Aput{0,3} % arc pondéré de Y vers X
\ncircle[angleA=90]{->}{X}{4mm}         \Bput{0,4} % boucle autour de X
\ncircle[angleA=-90]{->}{Y}{4mm}       \Bput{0,7} % boucle autour de Y
\end{pspicture}

```

7.3 Un graphe plus compliqué

Voici un graphe probabiliste à trois sommets :



La différence essentielle entre ce graphe et le précédent est que dans celui-ci les trois sommets ne sont pas alignés horizontalement : il faut donc définir les sommets au moyen de leurs coordonnées. C'est l'instruction `\psnode` que j'ai utilisée; cette instruction a besoin de trois paramètres : les coordonnées du sommet, son nom dans le dessin, le nom qui sera affiché dans le graphe.

On définira les trois sommets de ce graphe ainsi :

```

\psnode(0,0){X}{X}
\psnode(6,0){Y}{Y}
\psnode(3,-4.2){Z}{Z}

```

On peut rajouter de la couleur (pour les affichages des noms des sommets ou pour colorer les arcs), ou du gras (au moyen de `\boldmath`).

Le code complet de ce graphe probabiliste à trois états est :

```
\begin{pspicture}(-2,-6)(8,1)      % zone de tracé du graphe

    % définitions des sommets
\psnode(0,0){X}{\red \boldmath $X$}
\psnode(6,0){Y}{\boldmath $Y$}
\psnode(3,-4.2){Z}{\blue \boldmath $Z$}

\psset{nodesep=3pt,arcangle=15,arrowsize=2pt 3} % paramètres

    % arcs partant de X en rouge
\ncarc[linecolor=red,arcangle=10]{->}{X}{Y}      \Aput{\red 0,2}
\ncarc[linecolor=red]{->}{X}{Z}                  \Aput{\red 0,6}
\ncircle[angleA=60,linecolor=red]{->}{X}{.5cm}    \Bput{\red 0,2}

    % arcs partant de Y en noir
\ncarc{->}{Y}{X}                                  \Aput{0,6}
\ncarc{->}{Y}{Z}                                  \Aput{0,1}
\ncircle[angleA=-60]{->}{Y}{.5cm}                 \Bput{0,3}

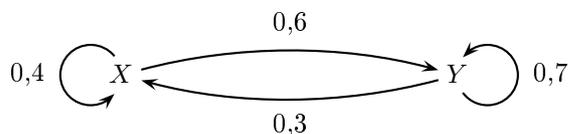
    % arcs partant de Z en bleu
\ncarc[linecolor=blue]{->}{Z}{X}                  \Aput{\blue 0,4}
\ncarc[linecolor=blue]{->}{Z}{Y}                  \Aput{\blue 0,2}
\ncircle[angleA=180,linecolor=blue]{->}{Z}{.5cm} \Bput{\blue 0,4}

\end{pspicture}
```

7.4 Raccourcis

Tout comme pour les arbres (voir page 30), on peut définir les légendes sur les arcs en utilisant des raccourcis ; il faut pour cela activer la variable `shortput` en lui donnant la valeur `nab`, puis on utilise l'exponentiation `^` au lieu de `\Aput`, et la mise en indice `_` au lieu de `\Bput`.

Ainsi le diagramme :



s'obtient en entrant le code :

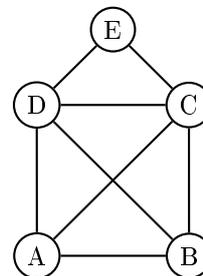
```
\begin{pspicture}(-2,-1)(6,1.5)
\Rnode{X}{X} \hskip 4cm \Rnode{Y}{Y}
\psset{nodesep=3pt,arcangle=15,arrowsize=2pt 3,shortput=nab}
\ncarc{->}{X}{Y}^0,6 % exposant
\ncarc{->}{Y}{X}^0,3
\ncircle[angleA=90]{->}{X}{4mm}_0,4 % indice
\ncircle[angleA=-90]{->}{Y}{4mm}_0,7
\end{pspicture}
```

7.5 Autre graphe

On peut également avoir besoin d'un graphe non orienté comme celui représenté ci-contre.

Les arcs ont été remplacés par des segments que l'on trace avec `\ncline`, et les sommets sont définis au moyen de l'instruction `\cnodeput` ; comme les sommets ne sont pas alignés horizontalement, il faut définir leurs coordonnées.

Avec `\cnodeput`, les noms des sommets sont dans un cercle dont la taille s'adapte au texte ; si on ne veut pas que les noms soient entourés de ce cercle, il suffit d'utiliser l'instruction `\cnodeput*`.



Le code de ce diagramme est :

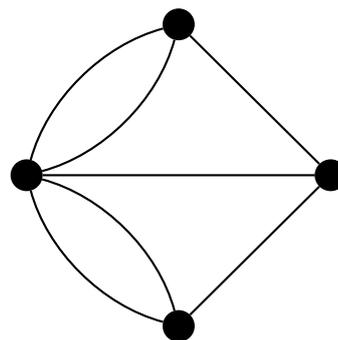
```
\psset{nodesep=0pt}
\begin{pspicture}(0,0)(2,3.2)
% définition des sommets
\cnodeput(0,0){A}{A}
\cnodeput(2,0){B}{B} \cnodeput(2,2){C}{C}
\cnodeput(0,2){D}{D} \cnodeput(1,3){E}{E}
% tracés des segments reliant les sommets
\ncline{A}{B} \ncline{A}{C} \ncline{A}{D}
\ncline{B}{C} \ncline{B}{D} \ncline{C}{D}
\ncline{D}{E} \ncline{C}{E}
\end{pspicture}
```

7.6 Les ponts de Königsberg

Un grand classique à l'origine de la théorie des graphes : le problème des ponts de Königsberg résolu par EULER.

Voici un diagramme représentant la situation :

```
\psset{nodesep=0pt, radius=6pt, arcangle=30}
\begin{pspicture}(0,-2)(4,2)
% définition des sommets
\Cnode*(0,0){A}
\Cnode*(4,0){B}
\Cnode*(2,2){C}
\Cnode*(2,-2){D}
% tracés des arcs reliant les sommets
\ncline{A}{B} \ncline{B}{C} \ncline{B}{D}
\ncarc{A}{C} \ncarc{C}{A}
\ncarc{A}{D} \ncarc{D}{A}
\end{pspicture}
```



Les sommets ont une nouvelle forme : ils ont été définis au moyen de l'instruction `\Cnode*` ; ainsi `\Cnode*(0,0){A}` définit le sommet appelé A qui est représenté par un disque centré en (0,0) et dont le rayon est donné par la variable `radius` définie dans `\psset`.

On obtient un cercle à la place d'un disque en entrant `\Cnode` à la place de `\Cnode*`.

Enfin si on veut des cercles (ou des disques) de rayons différents, on utilisera `\cnode` (ou `\cnode*`) ; il faudra alors rajouter comme deuxième paramètre le rayon du cercle : `\cnode(0,0){6pt}{A}`.

7.7 Tout faire avec `\ncurve`

Dans les graphes précédents, on a tracé les arcs en utilisant `\ncarc` et `\ncline`; ces instructions sont simples et faciles à utiliser.

Il en existe une autre, un peu plus complexe, mais plus universelle : `\ncurve`.

La documentation dit « `\ncurve` draws a bezier curve between the nodes », ce que l'on comprend facilement.

La syntaxe de cette instruction est :

$$\backslash\ncurve[\text{angleA}=\dots, \text{angleB}=\dots]{\text{sommet_A}}{\text{sommet_B}}$$

où `angleA` est l'angle en degrés que fait la courbe au départ du premier sommet, et `angleB` est l'angle que fait la courbe à l'arrivée au second sommet.

Par défaut, ces angles valent 0° et ils sont mesurés comme sur un cercle trigonométrique.

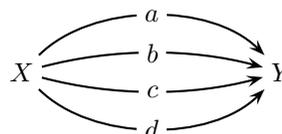
Voici un petit tableau avec différentes valeurs des angles pour voir ce que l'on peut faire :

Angle de départ <code>angleA</code>	Angle d'arrivée <code>angleB</code>	Résultat
45°	135°	
-15°	-165°	
-60°	180°	
90°	90°	
0°	180°	
90°	-90°	

La version `\ncurve*` remplit la zone sous la courbe; je n'en ai pas trop vu l'utilité. Essayez!

Il est donc très facile de faire un diagramme comme celui-ci en utilisant `\ncurve` :

```
\rnode{X}{X} \hspace 3cm \rnode{Y}{Y}
\psset{nodesep=3pt,arrowsize=2pt 3}
\ncurve[angleA=45,angleB=135]{->}{X}{Y} \mput*{a}
\ncurve[angleA=15,angleB=165]{->}{X}{Y} \mput*{b}
\ncurve[angleA=-15,angleB=-165]{->}{X}{Y} \mput*{c}
\ncurve[angleA=-45,angleB=-135]{->}{X}{Y} \mput*{d}
```



Vous en saurez autant que moi en allant consulter la documentation du package `pst-node` disponible à l'adresse <http://www.ctan.org/pkg/pst-node>

Il est inutile de charger explicitement ce package car il est intégré à `pstricks-add`.