Lois de probabilités

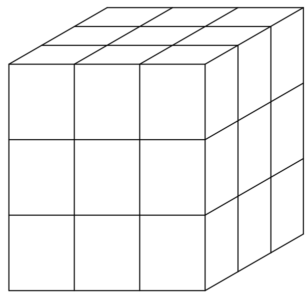
▷ **Exercice 1.** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On marque 10 points si on a tiré l'as de cœur, 5 points si on a tiré un autre as, 3 points si on a tiré une figure (Valet, Dame ou Roi) et aucun point dans tous les autres cas. On définit ainsi une variable aléatoire X. Donner la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.

x_i	0	3	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$	$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

- $\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = \dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{3}{8} \times 3 + \dfrac{3}{32} \times 5 + \dfrac{1}{32} \times 10 = \dfrac{61}{32}$
- $\mathbb{V}(X) = \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{1}{2} \times 0^2 + \dfrac{3}{8} \times 3^2 + \dfrac{3}{32} \times 5^2 + \dfrac{1}{32} \times 10^2 - \left(\dfrac{61}{32}\right)^2 = \dfrac{283}{32} - \left(\dfrac{61}{32}\right)^2 = \dfrac{5335}{1024} \simeq 5,21.$

  Ainsi $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\dfrac{5335}{1024}} \simeq 2,28$

▷ **Exercice 2.** On fabrique un gros cube en agglomérant 27 petits cubes (voir figure ci-dessous). On peint en rouge toutes les faces du gros cube, puis on sépare de nouveau les 27 petits qui ont donc certaines de leurs faces peintes en rouge. On tire au hasard un petit cube et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces peintes en rouge sur le petit cube tiré. Donner la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.



$X(\Omega) = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 \}$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27} = \frac{2}{9}$	$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{1}{27} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{4}{9} \times 2 + \frac{8}{27} \times 3 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{27} \times 0^2 + \frac{2}{9} \times 1^2 + \frac{4}{9} \times 2^2 + \frac{8}{27} \times 3^2 - 2^2 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

donc $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

▷ **Exercice 3.** *Loterie*

Partie A

Une roue de loterie comporte trois secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant. La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité du numéro 1, et la probabilité du numéro 3 est triple de celle du numéro 1. Calculer les probabilités de sortie respectives des trois numéros.

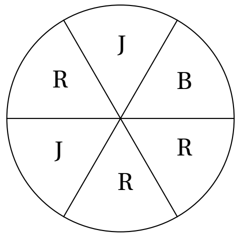
$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$ avec $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$ et $P(\{3\}) = 3P(\{1\})$ donc $P(\{1\}) + 2P(\{1\}) + 3P(\{1\}) = 1 \iff P(\{1\}) = \dfrac{1}{6}$

d'où finalement $\begin{cases} P(\{1\}) = \frac{1}{6} \\ P(\{2\}) = \frac{1}{3} \\ P(\{3\}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Partie B

La roue est maintenant divisée en six secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère :

- 2 secteurs sont jaunes (J sur la figure)
- 3 secteurs sont rouges (R sur la figure)
- 1 secteur est bleu (B sur la figure).



La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20€, si le bleu sort, il gagne 30€, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10€. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur.

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X(\Omega) = \{-10 ; 10 ; 20\}$. On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-10	10	20
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) Calculer son espérance mathématique.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{1}{2} \times (-10) + \frac{1}{3} \times 10 + \frac{1}{6} \times 20 \\ &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur soit positive. A quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

Soit m la mise en euros. $X(\Omega) = \{-m ; 20 - m ; 30 - m\}$. La loi de probabilité de X devient :

x_i	$-m$	$20-m$	$30-m$
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi $\mathbb{E}(X) < 0 \iff \frac{1}{2} \times (-m) + \frac{1}{3} \times (20 - m) + \frac{1}{6} \times (30 - m) < 0 \iff -m + \frac{35}{3} < 0 \iff m > \frac{35}{3}$

$\frac{35}{3} \approx 11,67$ donc il faut que la mise soit supérieure ou égale à 12 €.

▷ **Exercice 4.** Une urne contient 10 boules blanches et n boules noires ($n \geq 2$). Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Si on tire une boule blanche on gagne 2 euros, si on tire une boule noire on perd 3 euros. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

1. Donner la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{-3 ; 2\}$

x_i	-3	2
$p(X = x_i)$	$\frac{n}{10+n}$	$\frac{10}{10+n}$

2. Calculer l'espérance de X.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{n}{10+n} \times (-3) + \frac{10}{10+n} \times 2 \\ &= \frac{20 - 3n}{10+n}\end{aligned}$$

3. Pour combien de boules noires dans l'urne le jeu est-il favorable au joueur ?

$\mathbb{E}(X) > 0 \iff \frac{20-3n}{10+n} > 0 \iff 20 - 3n > 0 \iff n < \frac{20}{3} \approx 6,67$ donc pour un nombre de boules noires inférieur ou égal à 6, le jeu est favorable au joueur.

▷ **Exercice 5.** Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif). On organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 10€ ; si la boule est jaune, il reçoit 2€ ; si la boule est noire, il ne reçoit rien. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1€. On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur (somme reçue moins la mise).

1. Quel est le nombre de boules dans le sac ?

Il y a $n+4$ boules dans le sac.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .

$X_n(\Omega) = \{-1\ ;\ 1\ ;\ 9\}$. On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-1	1	9
$p(X = x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

3. Déterminer, en fonction de n, l'espérance mathématique de X_n .

$\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = -1 \times \dfrac{n}{n+4} + 1 \times \dfrac{3}{n+4} + 9 \times \dfrac{1}{n+4} = \dfrac{12-n}{n+4}$

4. On souhaite que l'espérance soit négative. Quel nombre minimal de boules noires doit-il y avoir dans le sac ?

$\mathbb{E}(X) \leq 0 \iff \dfrac{12-n}{n+4} \leq 0 \iff 12-n \leq 0 \iff n > 12$

Il faut donc un minimum de 13 boules pour que l'espérance soit strictement négative.

▷ **Exercice 6.** Un jeu consiste à lancer de la main gauche, une balle dans un seau. Parmi l'ensemble des joueurs, $\dfrac{5}{6}$ sont droitiers et $\dfrac{1}{6}$ sont gauchers. Pour un joueur droitier, la probabilité de mettre la balle dans le seau est $\dfrac{1}{4}$. Pour un joueur gaucher, cette probabilité est $\dfrac{1}{2}$.

1. On choisit au hasard un individu dans cette population. On note :

G : l'événement : « l'individu choisi est gaucher », S : l'événement : « l'individu met la balle dans le seau ».

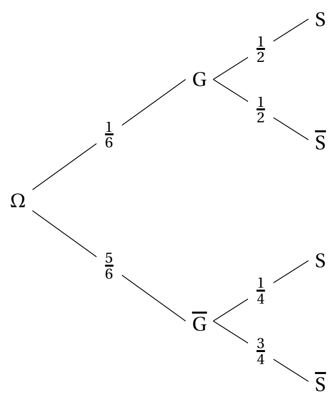
a) Déterminer la probabilité de l'événement $G \cap S$.

$P(G \cap S) = P(G) \times P_G(S) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$

b) Calculer la probabilité de l'événement S.

G et $\overline{G}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

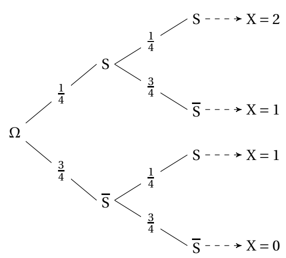
$$\begin{aligned} P(S) &= P(G \cap S) + P\left(\overline{G} \cap S\right) \\ &= P(G) \times P_G(S) + P\left(\overline{G}\right) \times P_{\overline{G}}(S) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$



2. Dans cette question, on a sélectionné Paul qui est un joueur droitier. Il lance deux balles l'une après l'autre ; on suppose les deux lancers indépendants. Soit X le nombre de balles mises par Paul dans le seau après les deux lancers.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

$X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$



b) Déterminer la loi de probabilité associée aux valeurs prises par X. Quelle est son espérance ?

L'événement $X = 0$ est réalisé selon un seul chemin qui a pour probabilité $P(X=0) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$.

L'événement $X = 1$ est réalisé selon deux chemins qui ont chacun pour probabilité $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

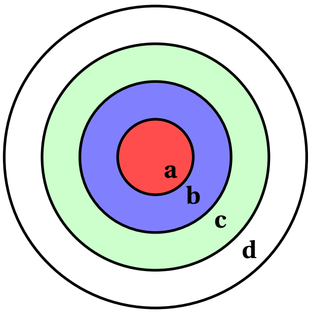
donc $P(X=1) = 2 \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{8}$.

L'événement $X = 2$ est réalisé selon un seul chemin qui a pour probabilité $P(X=2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum p_i x_i \\ &= \frac{9}{16} \times 0 + \frac{6}{16} \times 1 + \frac{1}{16} \times 2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

▷ **Exercice 7.** Le dessin ci-dessous représente une cible constituée de 4 cercles concentriques. Leurs rayons sont respectivement 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm et ils définissent 4 zones a, b, c, d. Au tir, la probabilité d'atteindre la cible est $\frac{2}{3}$ et la probabilité d'atteindre chacune des zones, a, b, c, d est proportionnelle à son aire.



zone	*cible*	*a*	*b*	*c*	*d*
aire	1600π	100π	300π	500π	700π
probabilité	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$

$\times \frac{1}{2400\pi}$

1. Calculer la probabilité d'atteindre chacune des zones a,b,c,d.

   La probabilité de chaque zone est proportionnelle à son aire. Il faut donc calculer l'aire de chaque secteur :

   - $aire(cible) = \pi r^2 = \pi \times 40^2 = 1600\pi$
   - $aire(a) = \pi \times 10^2 = 100\pi$
   - $aire(b) = \pi \times 20^2 - \pi \times 10^2 = 300\pi$
   - $aire(c) = \pi \times 30^2 - \pi \times 20^2 = 500\pi$
   - $aire(d) = \pi \times 40^2 - \pi \times 30^2 = 500\pi$

2. Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs 4, 3, 2, 1 quand on atteint les zones a, b, c, d respectivement et 0 quand on rate la cible. Déterminer l'espérance de X.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum p_i\, x_i \\ &= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{7}{24} \times 1 + \frac{5}{24} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{24} \times 4 \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

▷ **Exercice 8.** Une variable aléatoire X est telle que $\mathbb{E}(X) = 6$ et $\sigma(X) = 2,5$.

1. Déterminer les deux nombres réels a et b, avec a positif, tels que la variable aléatoire Y définie par $Y = aX + b$ ait pour espérance 0 et pour écart-type 1.

$$\begin{cases}\mathbb{E}(Y) = 0 \\ \sigma(Y) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}\mathbb{E}(aX+b) = 0 \\ \sigma(aX+b) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}a\mathbb{E}(X) + b = 0 \\ |a|\sigma(X) = 1\end{cases} \underset{\substack{a \geq 0 \\ |a|=a}}{\iff} \begin{cases}6a + b = 0 \\ 2,5a = 1\end{cases} \iff \begin{cases}6 \times \frac{2}{5} + b = 0 \\ a = \frac{2}{5}\end{cases} \iff \begin{cases}b = -\frac{12}{5} \\ a = \frac{2}{5}\end{cases}$$

2. Même question en notant μ l'espérance de X et σ son écart-type ($\sigma \neq 0$). On dit alors que la nouvelle variable Y est centrée et réduite.

$$\begin{cases}\mathbb{E}(Y) = 0 \\ \sigma(Y) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}\mathbb{E}(aX+b) = 0 \\ \sigma(aX+b) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}a\mathbb{E}(X) + b = 0 \\ |a|\sigma(X) = 1\end{cases} \underset{\substack{a \geq 0 \\ |a|=a}}{\iff} \begin{cases}a\mu + b = 0 \\ a\sigma = 1\end{cases} \underset{\sigma \neq 0}{\iff} \begin{cases}\frac{1}{\sigma} \times \mu + b = 0 \\ a = \frac{1}{\sigma}\end{cases} \iff \begin{cases}b = -\frac{\mu}{\sigma} \\ a = \frac{2}{5}\end{cases}$$

Ainsi $\boxed{Y = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X - \mu}{\sigma}}$

▷ **Exercice 9.** Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ($x \in \mathbb{R}$).

x_i	**0**	**1**	x	**4**	**5**
$p_i = p(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	?

1. Calculer $p(X = 5)$.

   $$p(X = 5) = 1 - \sum_{i=0}^{4} p_i = 1 - (0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,4) = 0,1$$

2. Sachant que $\mathbb{E}(X) = 2,6$, démontrer avec soin que la seule valeur possible pour x est $x = 2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = 2,6 &\iff \sum p_i x_i = 2,6 \\ &\iff 0 + 0,1 + 0,2x + 1,6 + 0,5 = 2,6 \\ &\iff 0,2x = 0,4 \\ &\iff x = 2\end{aligned}$$

3. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum p_i x_i^2 - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \\ &= \ldots \\ &= 3,04\end{aligned}$$

4. Soit Y la variable aléatoire définie par Y = −2X + 3.
Déterminer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(-2X+3)\\ &= -2\mathbb{E}(X)+3\\ &= -2\times 2,6+3\\ &= -2,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(-2X+3)\\ &= a^2\mathbb{V}(X)\\ &= (-2)^2\times 3,04\\ &= 12,16\end{aligned}$$

d'où $\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(Y)} \simeq 3,49$

5. a est un nombre réel positif et b un nombre réel. Z est la variable aléatoire définie par $Z = aX + b$. Déterminer a et b tels que $\mathbb{V}(Z) = 12,16$ et $\mathbb{E}(Z) = 6,2$.

$$\begin{cases}\mathbb{E}(Z)=6,2\\ \mathbb{V}(Z)=1,2\end{cases} \iff \begin{cases}\mathbb{E}(aX+b)=6,2\\ \mathbb{V}(aX+b)=12,16\end{cases} \iff \begin{cases}a\mathbb{E}(X)+b=6,2\\ a^2\mathbb{V}(X)=12,16\end{cases} \iff \begin{cases}2a+b=6,2\\ a^2\times 3,04=12,16\end{cases} \iff \begin{cases}2a+b=6,2\\ a^2=4\end{cases}$$

soit $\begin{cases}2a+b=6,2\\ a=-2 \quad \text{ou} \quad a=2\end{cases} \underset{a\geq 0}{\iff} \begin{cases}b=2,2\\ a=2\end{cases}$

▷ **Exercice 10.** Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type $\sigma \neq 0$.
Y est la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\sigma(Y) = 1$.

- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X) - \dfrac{\mu}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}\mu - \dfrac{\mu}{\sigma} = 0$
- $\sigma(Y) = \sigma\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{\mu}{\sigma}\right) = \left|\dfrac{1}{\sigma}\right|\sigma(X) = \dfrac{1}{\sigma}\times\sigma = 1$

▷ **Exercice 11.** On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau suivant :

x_i	**1**	**2**	**3**	x	**10**
$p_i = p(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,3	?

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X = 10)$.
$\sum p_i = 1$ donc $p(X = 10) = 1 - p(X = 1) - p(X = 2) - p(X = 3) - p(X = x) = 0,1$

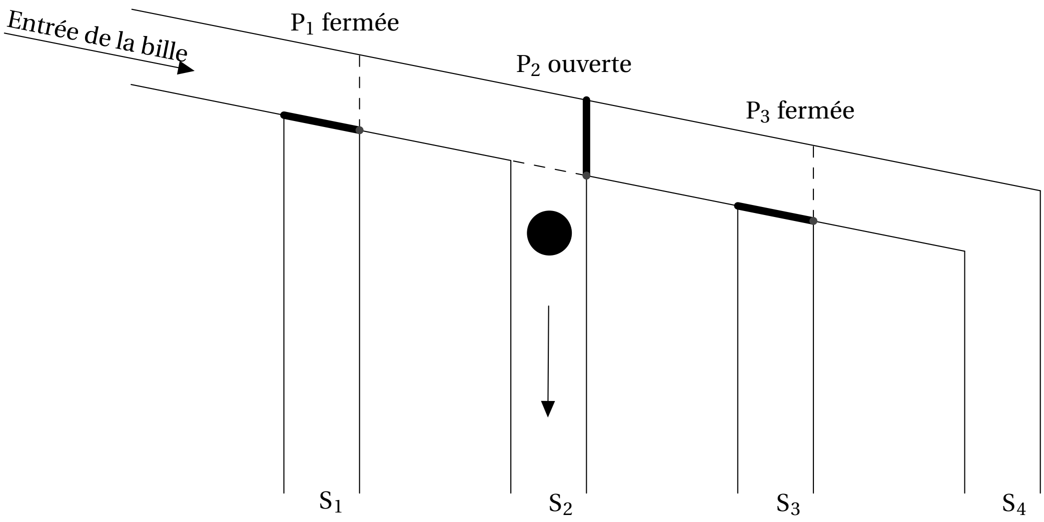
2. Déterminer le nombre réel x positif tel que la variance de la variable aléatoire X soit égale à 8,05.
$\mathbb{E}(X) = \sum p_i x_i = 0,1\times 1 + 0,2\times 2 + 0,3\times 3 + 0,3x + 0,1\times 10 = 2,4 + 0,3x$
$\mathbb{V}(X) = \sum p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2 = 0,1\times 1^2 + 0,2\times 2^2 + 0,3\times 3^2 + 0,3\times x^2 + 0,1\times 10^2 - (2,4+0,3x)^2 = 13,6 + 0,3x^2 - 5,76 - 1,44x - 0,09x^2$
donc $\mathbb{V}(X) = 0,21x^2 - 1,44x + 7,84$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = 8,05 &\iff 0,21x^2 - 1,44x + 7,84 = 8,05\\ &\iff 0,21x^2 - 1,44x - 0,21 = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{9}{4} > 0\right)\\ &\iff \underbrace{x = -\frac{1}{7}}_{\substack{\text{impossible}\\ \text{car } x\geq 0}} \quad \text{ou} \quad x = 7\end{aligned}$$

Ainsi $x = 7$

3. Calculer alors l'espérance de X.
$\mathbb{E}(X) = 2,4 + 0,3x = 2,4 + 0,3\times 7 = 4,5$

▷ **Exercice 12.** Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1, P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles s_1, s_2, s_3 et s_4. Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille : sur le schéma, les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, donc la bille sortira par s_2.



1. Énumérer dans un tableau comme ci-dessous, en s'aidant éventuellement d'un arbre de choix, toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations :

P_1	P_2	P_3	Sortie
F	F	F	s_4
F	F	O	s_3
F	O	F	s_2
O	F	F	s_1
F	O	O	s_2
O	F	O	s_1
O	O	F	s_1
O	O	O	s_1

2. On suppose que les huit événements élémentaires, trouvés à la question 1., sont équiprobables.

a) Soit A l'événement (F ; O ; F). Quelle est la probabilité $p(\mathrm{A})$ de A ?
$p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{8}$

b) Soit les événements : S1 : « la bille sort par s1 », S2 : « la bille sort par s2 » ... Calculer les probabilités de chacun de ces événements.

- $p(\mathrm{S}_1) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
- $p(\mathrm{S}_2) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
- $p(\mathrm{S}_3) = \dfrac{1}{8}$
- $p(\mathrm{S}_4) = \dfrac{1}{8}$

3. Pour jouer on doit miser 7€. Si la bille sort par :

- s_1 , on ne reçoit rien ;
- s_2 , on reçoit 5 € ;
- s_3 , on reçoit 10 € ;
- s_4 , on reçoit 20 €

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque sortie possible, associe le gain (positif ou négatif) en euros du joueur.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
$\mathrm{X}(\Omega) = \{-7\ ;\ -2\ ;\ 3\ ;\ 13\}$

b) Donner la loi de probabilité de X.

x_i	**-7**	**-2**	**3**	**13**
p_i	0,5	0,25	0,125	0,125

c) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$, l'espérance mathématique de X. Interprétez le résultat.
$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum p_i x_i = \ldots = -2$

d) On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable. Déterminer cette nouvelle mise en justifiant la réponse.
Il suffit de diminuer la mise de 2 €. En effet la variable aléatoire Y qui donne le nouveau gain algébrique vérifie $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + 2$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}+2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}) + 2 = -2 + 2 = 0$ et le jeu devient équitable. Une mise de 5 € répond donc au problème.

▷ **Exercice 13.** Dans une fête foraine, pour une mise initiale de 3 €, le joueur est invité à lancer deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si le résultat est un « double », le joueur empoche le montant en euros égal à la somme des points obtenus.
- Si un seul 6 apparaît, le joueur gagne le montant en euros indiqué sur l'autre dé.
- Dans les autres cas, la partie est perdue.

On désigne par G la variable aléatoire définie par le « gain » du joueur (gain qui peut être négatif).

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Calculer l'espérance mathématique de G.

3. Le jeu est-il équitable ?

▷ **Exercice 14.** On propose le jeu suivant : un joueur mise 3 € puis tire un ticket dans une urne qui contient 5% de tickets portant le numéro 15, 10% de tickets portant le numéro 10, 20% de tickets portant le numéro 5 et le reste portant la mention « perdu ».

- Si le ticket porte le numéro 15, il gagne 15 €.
- Si le ticket porte le numéro 10, il gagne 10 €.
- Si le ticket porte le numéro 5, il gagne 5 €.
- Si le ticket porte la mention « perdu », il ne gagne rien.

On appelle X la variable aléatoire définie par le gain du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Le jeu est-il équitable ?

4. Par quelle valeur doit-on remplacer le gain de 15 € pour que le jeu soit équitable ?

▷ **Exercice 15.** Dans une urne on dispose de cinq boules indiscernables au toucher : trois vertes numérotées de 1 à 3 et deux rouges numérotées 4 et 6.

Règle du jeu : La partie consiste à tirer successivement deux boules au hasard, en remettant la première boule dans l'urne pour le second tirage. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue. Sinon, le joueur remporte le montant en euros égal au nombre formé en prenant le chiffre de la boule verte pour les dizaines et celui de la boule rouge pour les unités (ainsi le tirage vert 2 et rouge 4 remporte 24 €). Soit X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

1. a) Donner la loi de probabilité de la variable X et son espérance.
b) On souhaite rendre le jeu équitable. Pour cela on fait payer la partie a €. Quelle valeur choisir pour a ?

2. On suppose dans la suite que la mise est égale à la valeur trouvée précédemment.

a) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Le joueur réalise un gain strictement positif »
b) Le joueur fait 5 parties de suite. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois ?

▷ **Exercice 16.** *Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :*

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*
Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\mathbb{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a) Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ? et p' qu'il perde ?
b) Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Soit B l'évènement « Le joueur gagne au moins une fois. » Quelle est la probabilité de B ?