Antilles Guyane septembre 2013

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite **D** $_1$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite **D** $_2$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à **D** $_1$ et à **D** $_2$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points A(0 ; − 1 ; 1), B(4 ; − 3 ; 0) et C(− 1 ; − 2 ; − 1).

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$ avec t appartenant à ℝ.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Affirmation 1** : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

2. **Affirmation 2** : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

3. **Affirmation 3** : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

4. On appelle **D** la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}$ (11 ; − 1 ; 4).

Affirmation 4 : La droite **D** est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels ℝ telle que :

$$f_k(x) = k x \, e^{-kx}.$$

On note **C** $_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur ℝ par : $f_1(x) = x\,e^{-x}$..

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe **C** $_1$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Étudier les variations de f_1 sur ℝ puis dresser son tableau de variation sur ℝ.

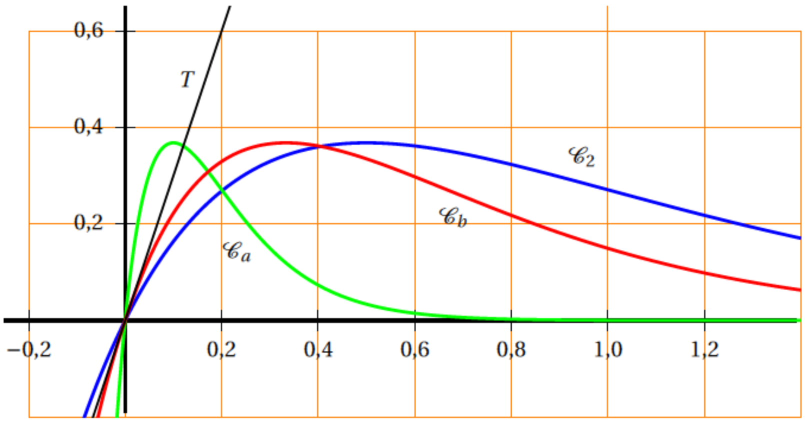
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur ℝ telle que : $g_1(x) = -(x + 1)\,e^{-x}$ est une primitive de la fonction f_1 sur ℝ.

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe **C** $_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes **C** $_2$, **C** $_a$ et **C** $_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à **C** $_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes **C** $_k$ passent par un même point.

2. *a.* Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a $f'_k(x) = k(1 - kx)\,e^{-kx}$.

b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d. Écrire une équation de la tangente à **C** $_k$ au point O origine du repère.

e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12mm. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.

Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci dessous).

k	$p(Y \leq k)$
5,8	3,16712E−05
5,82	0,000159109
5,84	0,000687138
5,86	0,00255513
5,88	0,008197536
5,9	0,022750132
5,92	0,054799292
5,94	0,11506967
5,96	0,211855399
5,98	0,344578258
6	0,5
6,02	0,655421742
6,04	0,788144601
6,06	0,88493033
6,08	0,945200708
6,1	0,977249868
6,12	0,991802464
6,14.	0,99744487
6,16	0,999312862
6,18	0,999840891
6,2	0,999968329

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'évènement « la pièce est conforme pour le diamètre».

On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.

Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

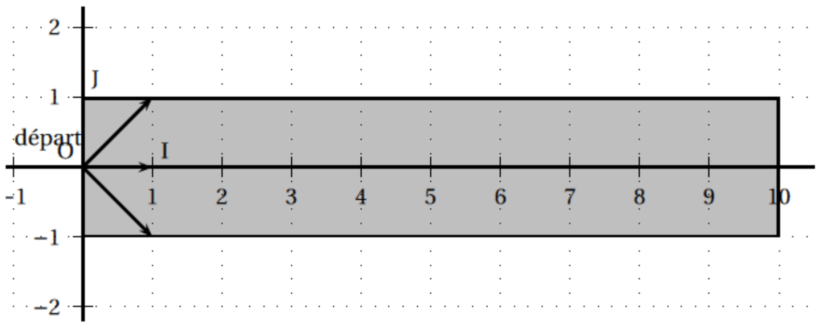
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée. On note (x ; y) les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ − 1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
Affecter à n une valeur choisie au hasard entre − 1, 0 et 1
Affecter à y la valeur y + n
Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : $(-1 ; 1)$; $(10 ; 0)$; $(2 ; 4)$; $(10 ; 2)$.

Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x ; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée – 1 ».

B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».

C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. A l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        | Affecter à X la valeur X – 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?

2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?

3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

• **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

• **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} z_1 \equiv y_1 (26) \text{ avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y_2 (26) \text{ avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{array} \right.$

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

RE $\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP

Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26) \end{cases}$.

b. En déduire que $x_1 \equiv x'_1$ (26) et $x_2 \equiv x'_2$ (26) puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice $C' \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y_1 (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv y_2 (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{array} \right.$.

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.

On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $x1$ et $x2$, les nombres entiers tels que $\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y'_1 (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv y'_2 (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{array} \right.$

Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 & (26) \end{cases}$.

Conclure.

4. Décoder QC.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée de connaissances

$\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ sont deux droites sécantes de P donc pour toute droite **D** du plan P de vecteur directeur $\vec{u}$, il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\, \overrightarrow{u_1} + \mu\, \overrightarrow{u_2}$.

Si Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$ alors $\vec{v}\,.\,\overrightarrow{u_1} = \vec{v}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0$ donc $\vec{v}\,.\,\vec{u} = \lambda\, \vec{v}\,.\,\overrightarrow{u_1} + \mu\, \vec{v}\,.\,\overrightarrow{u_2} = 0$ donc Δ est orthogonale à **D**.

Réciproquement si Δ est orthogonale à toute droite de P alors en particulier, comme $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ sont deux droites de P alors, Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$.

d'où l'équivalence : Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et à $\mathbf{D}_2$.

Partie B

1. Affirmation 1 : VRAIE

$\overrightarrow{AB}(4\,;-2\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;-1\,;-2)$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (AC) sont sécantes.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}(1\,;3\,;-2)$

$\vec{v}\,.\,\overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$

$\vec{v}\,.\,\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0$

Δ est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AC) du plan P donc Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

(AB) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4t' \\ y = -2t' - 1 \\ z = -t' + 1 \end{cases}$

Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$

(AB) et Δ ne sont pas parallèles donc cherchons si elles sont sécantes.

Le point d'intersection de Δ et (AB) est le point dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} x = 4t' = t \\ y = -2t' - 1 = 3t - 1 \\ z = -t' + 1 = -2t + 8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 4t' - t = 0 \\ 2t' + 3t = 0 \\ t' - 2t = -7 \end{cases}$

les deux premières lignes donnent t = t' = 0 ce qui n'est pas vérifié par la troisième ligne du système donc les droites Δ et (AB) ne sont ni parallèles ni sécantes donc ne sont pas coplanaires.

3. Affirmation 3 : FAUSSE

$0 - 3 - 2 + 5 = 0$ donc A ∈ P

$4 + 3 \times (-3) + 5 = 0$ donc B ∈ P

$-1 + 3 \times (-2) - 2 \times (-1) = -1 - 6 + 2 = -3$ donc C ∉ P

Le plan P contient les points A, B et C donc l'affirmation est fausse.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Soit P' le plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

D a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 11t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$

Le point d'intersection de **D** et P' est le point dont les coordonnées vérifient : $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et $\begin{cases} x = 11t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$

or $11t + 3 \times (-t) - 2 \times 4t + 5 = 5$ donc **D** et P' n'ont pas de point d'intersection donc la droite **D** est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A : Étude du cas k = 1

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$, la courbe $\mathcal{C}_1$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$.

2. f_1 est le produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -\ e^{-x} \end{cases}$ donc $f'_1(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'_1(x)$ a le même signe que $1 - x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. $\begin{cases} u(x) = -(x+1) & u'(x) = -1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -\ e^{-x} \end{cases}$ donc $g'_1(x) = -\ e^{-x} + (x + 1)\,e^{-x} = (-1 + 1 + x)\,e^{-x}. = x\,e^{-x} = f_1(x)$ donc g_1 est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f_1(x)$ a le même signe que x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$		$-$	0	$+$	

5. La fonction f_1 est positive et continue sur [0 ; 10] donc l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$ a pour mesure $\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,dx$.

g_1 est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ donc $\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,dx = g_1(\ln 10) - g_1(0)$

$\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,dx = -(\ln 10 + 1)\,e^{-\ln 10} - [-1\,e^{0}] = (-\ln 10 - 1)\,0{,}1 + 1$

$\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,dx = 0{,}9 - 0{,}1\ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

1. $f_k(x) = k\,x\,e^{-kx}$ donc pour tout k réel, $f_k(0) = 0$.
Pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par O.

2. *a.* $\begin{cases} u(x) = k\,x & u'(x) = k \\ v(x) = e^{-kx} & v'(x) = -k\,e^{-kx} \end{cases}$ donc $f'_k(x) = k\,e^{-kx} - k^2\,x\,e^{-kx} = k\,(1 - k\,x)\,e^{-kx}$.

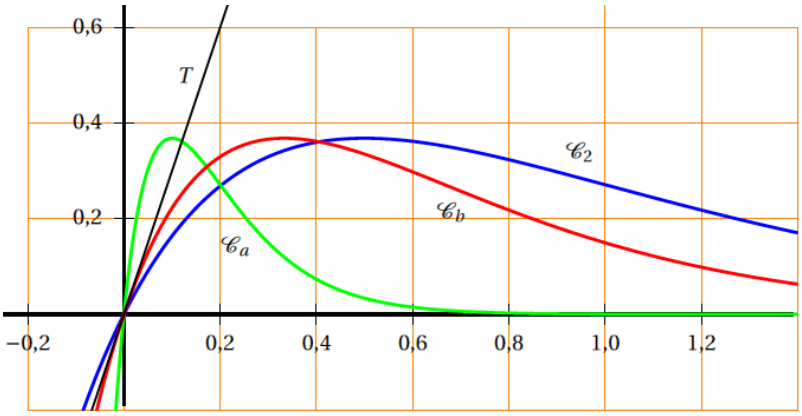
b. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout réel k strictement positif, $f'_k(x)$ a le même signe que $1 - k\,x$.

$k > 0$, $1 - k\,x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{k}$ donc pour tout réel k strictement positif, $f'_k(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{k}\right]$ et $f'_k(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{1}{k}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en $x = \frac{1}{k}$

Ce maximum est égal à $k \times \frac{1}{k}\,e^{-k \times \frac{1}{k}}$ soit e^{-1}.

c. En observant le graphique, $\mathcal{C}_a$ admet un maximum en $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a}$ est compris entre 0 et 0,2 donc $a > \frac{1}{0,2}$ soit $a > 5$ donc $a > 2$.



d. $f'_k(0) = k(1 - k \times 0)\,e^{-k \times 0} = k$
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère est donc $y = k\,x$.
e. Graphiquement le coefficient directeur de T est $\frac{0,6}{0,2}$ soit 3 or le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_b$ en O est b donc une valeur approchée de b est 3.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. Soit $T = \frac{X - \mu_1}{\sigma_1}$, T suit une loi normale centrée réduite.
$p_1 = P(\mu_1 - 3\,\sigma_1 \leq X \leq \mu_1 + 3\,\sigma_1) = P(-3 \leq T \leq 3) = 0{,}997$

2. $p_2 = P(Y \leq 6{,}12) - P(Y \leq 5{,}88) = 0{,}991802464 - 0{,}008197536$
$p_2 = 0{,}983604928$ soit $p_2 = 0{,}983$

3. *a.* Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Les évènements L et D sont indépendants donc $p(L \cap D) = p(L) \times p(D)$
La probabilité qu'une pièce soit acceptée est donc $p_1 \times p_2 = 0{,}980051$
La probabilité qu'une pièce ne soit pas acceptée est donc $1 - p_1 \times p_2$ soit 0,02 à 10^{-2} près.

b. $p(D) = p(D \cap \overline{L}) + p(D \cap L)$ donc $p(D \cap \overline{L}) = p_2 - p_1 \times p_2 = p_2(1 - p_1)$ donc les événements L et $\overline{D}$ sont indépendants donc $p_{\overline{L}}(D) = p(D) = p_2$.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Partie A : modélisation et simulation
1. (– 1 ; 1) ne peut pas être obtenu par l'algorithme car x commence en 0 puis augmente de 1 en 1 donc est toujours positif.
(10 ; 0) peut être obtenu par l'algorithme par exemple en choisissant à chaque étape, $n = 0$.
Au bout de 10 étapes $x = 10$ et $y = 0$, $x > 9$ donc l'algorithme s'arrête.

(2 ; 4) ne peut pas être obtenu par l'algorithme car $y \leq 1$ donc si $y = 1$ alors à l'étape suivante y peut être égal à 0, 1 ou 2,
Si $y = 2$, comme $y > 1$, l'algorithme s'arrête.

(10 ; 2) peut être obtenu par l'algorithme par exemple en choisissant $n = 1$ pendant les deux premières étapes en 0 ensuite alors au bout de 10 étapes $x = 10$ et $y = 2$, $x > 9$ donc l'algorithme s'arrête.

2.

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ≥ − 1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre − 1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Si x = 10 et y (y² – 1) = 0
        Afficher « Tom a réussi la traversée »
Sinon
        Afficher « Tom est tombé ».
Fin de l'algorithme
```

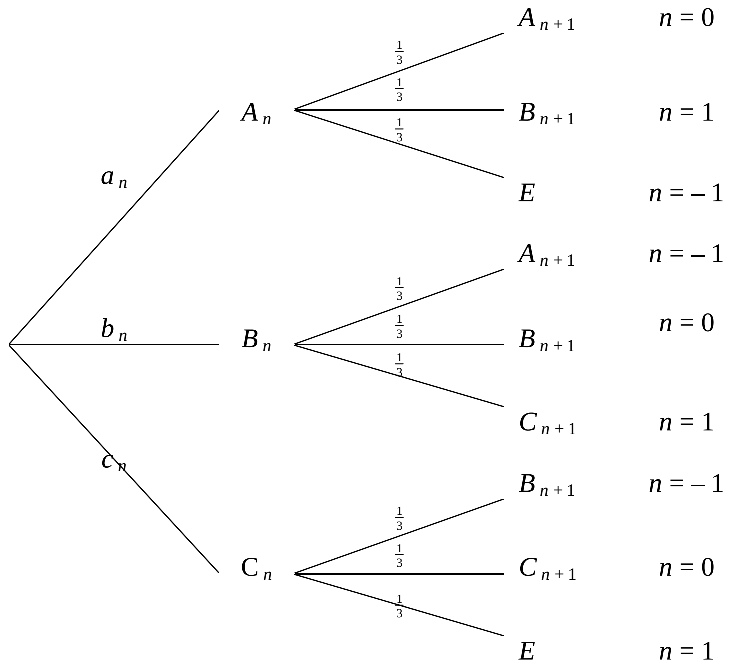
Partie B
1. A_0 l'évènement « après 0 déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée – 1 » est impossible : Tom se trouve en O donc $a_0 = 0$
B_0 l'évènement « après 0 déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 » est toujours vrai : Tom se trouve en O donc $b_0 = 1$
C_0 l'évènement « après 0 déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 » est impossible : Tom se trouve en O donc $c_0 = 0$.

2. $a_{n+1} = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{3}$

$b_{n+1} = a_n \times \dfrac{1}{3} + b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times \dfrac{1}{3}$

$c_{n+1} = b_n \times \dfrac{1}{3} + c_n \times \dfrac{1}{3}$

Soit E l'événement : « Tom est tombé ».



3. $p(A_1) = = \dfrac{1}{3}(a_0 + b_0) = \dfrac{1}{3}$

$p(B_1) = = \dfrac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0) = \dfrac{1}{3}$

$p\,(C_1) = \dfrac{1}{3}(b_0 + c_0) = \dfrac{1}{3}$

4. $p(A_2) = = \dfrac{1}{3}(a_1 + b_1) = \dfrac{2}{9}$

$p(B_2) = = \dfrac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1) = \dfrac{1}{3}$

$p\,(C_2) = \dfrac{1}{3}(b_1 + c_1) = \dfrac{2}{9}$

La probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements est : $p(A_2) + p(B_2) + p(C_2) = \dfrac{7}{9}$.

5. Tom traverse le pont : $p = a_{10} + b_{10} + c_{10}$
$p = 0{,}040\,272 + 0{,}056\,953 + 0{,}040\,272 = 0{,}137497$

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. A = 3 donc X = A = 3, X < 26 donc l'algorithme affiche 3

2. A = 55 donc X = A = 55, X ≥ 26 donc X prend la valeur 55 – 26 soit 29
29 > 26 donc X prend la valeur 29 – 26 soit 3 donc l'algorithme affiche 3

3. L'algorithme affiche le reste de la division de A par 26

Partie B

• **Étape 2** : $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \times 3 + 4 \\ 17 \times 5 + 4 \times 2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} z_1 \equiv 55 \quad (26) \text{ avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv 93 \quad (26) \text{ avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{array} \right.$

$55 = 26 \times 2 + 3$ donc $55 \equiv 3 \ (26)$ et $93 = 26 \times 3 + 15$ donc $93 \equiv 15 \ (26)$

$0 \leq 3 \leq 25$ et $0 \leq 15 \leq 25$ donc $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. *a.* **Étape 2**

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 \\ y_2 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$

de même $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} y'_1 = 3x'_1 + x'_2 \\ y'_2 = 5x'_1 + 2x'_2 \end{cases}$

Étape 3

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} z_1 \equiv y_1 (26) \text{ avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y_2 (26) \text{ avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{array} \right.$

$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} z_1 \equiv y'_1 (26) \text{ avec } 0 \leq z_1 \leq 25 \\ z_2 \equiv y'_2 (26) \text{ avec } 0 \leq z_2 \leq 25 \end{array} \right.$

donc $\left| \begin{array}{l} y_1 \equiv y_1 (26) \\ y_2 \equiv y_2 (26) \end{array} \right.$ soit $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26) \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26) \end{cases}$ donc $\begin{cases} 5(3x_1 + x_2) \equiv 5(3x'_1 + x'_2) & (26) \\ 3(5x_1 + 2x_2) \equiv 3(5x'_1 + 2x'_2) & (26) \end{cases}$

soit $\begin{cases} -5(3x_1 + x_2) + 3(5x_1 + 2x_2) \equiv -5(3x'_1 + x'_2) + 3(5x'_1 + 2x'_2) & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_2 \equiv x'_2 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 & (26) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_2 \equiv x'_2 & (26) \\ 5x_1 \equiv 5x'_1 & (26) \end{cases}$

26 divise $x_2 - x'_2$ or $0 \leq x_2 \leq 25$ et $0 \leq x'_2 \leq 25$ donc $-25 \leq x_2 - x'_2 \leq 25$
Le seul multiple de 26 compris entre – 25 et 25 est 0 donc $x_2 - x'_2 = 0$ donc $x_2 = x'_2$.

$5x_1 \equiv 5x'_1$ (26) donc $5 \times 5x_1 \equiv 5 \times 5x'_1$ (26) or $25 \equiv -1$ (26) donc $x_1 \equiv x'_1$ (26)
26 divise $x_1 - x'_1$ or $0 \leq x_1 \leq 25$ et $0 \leq x'_1 \leq 25$ donc $-25 \leq x_1 - x'_1 \leq 25$
Le seul multiple de 26 compris entre – 25 et 25 est 0 donc $x_1 - x'_1 = 0$ donc $x_1 = x'_1$.

2. *a.* $C\,C' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 - 5 & -3 + 3 \\ 5 \times 2 - 2 \times 5 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $C' \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 - 15 \\ -5 \times 3 + 3 \times 15 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 30 \end{pmatrix}$

c. $\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv -9 \quad (26) \text{ avec } 0 \leq x_1 \leq 25 \\ x_2 \equiv 30 \quad (26) \text{ avec } 0 \leq x_2 \leq 25 \end{array} \right.$

$-9 = 26 - 9$ soit $-9 \equiv 17$ (26) avec $0 \leq 17 \leq 25$

$30 = 26 + 4$ soit $30 \equiv 4$ (26) avec $0 \leq 4 \leq 25$ donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$

d. On peut donc conjecturer le processus de décodage suivant :

• **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où z_1 correspond à la première lettre du mot et z_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

• **Étape 2** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

• **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y_1 (26) \text{ avec } 0 \le x_1 \le 25 \\ x_2 \equiv y_2 (26) \text{ avec } 0 \le x_2 \le 25 \end{array} \right.$

• **Étape 4** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

3. Soient y'_1 et y'_2 tels que $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ donc $\left| \begin{array}{l} y'_1 \equiv 2 z_1 - z_2 \\ y'_2 \equiv -5 z_1 + 3 z_2 \end{array} \right.$

$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ donc $C \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = C\, C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ donc $z_1 = 3 y'_1 + y'_2$ et $z_2 = 5 y'_1 + 2 y'_2$.

$\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y'_1 (26) \text{ avec } 0 \le x_1 \le 25 \\ x_2 \equiv y'_2 (26) \text{ avec } 0 \le x_2 \le 25 \end{array} \right.$ donc $\left\{ \begin{array}{ll} 3 x_1 + x_2 \equiv z_1 & (26) \\ 5 x_1 + 2 x_2 \equiv z_2 & (26) \end{array} \right.$

donc z_1 est le nombre codé correspondant à x_1 et z_2 celui correspondant à x_2.

$\left| \begin{array}{l} x_1 \equiv y'_1 (26) \text{ avec } 0 \le x_1 \le 25 \\ x_2 \equiv y'_2 (26) \text{ avec } 0 \le x_2 \le 25 \end{array} \right.$ donc $\left| \begin{array}{ll} x_1 \equiv 2 z_1 - z_2 & (26) \text{ avec } 0 \le x_1 \le 25 \\ x_2 \equiv -5 z_1 + 3 z_2 & (26) \text{ avec } 0 \le x_2 \le 25 \end{array} \right.$

4. • **Étape 1** : Q est remplacée par 16, R par 17

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

• **Étape 2** : $C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 16 - 17 \\ -5 \times 16 + 3 \times 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -29 \end{pmatrix}$

• **Étape 3** :

$0 \le 15 \le 26$

$-29 = 26 \times 2 + 23$ donc $-29 \equiv 23$ (26) donc $\begin{pmatrix} 15 \\ -29 \end{pmatrix}$ est remplacé par $\begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$.

• **Étape 4** :

Par lecture inverse du tableau :

15 est le nombre correspondant à P et 23 est le nombre correspondant à X donc QC est décodé en PX.