Amérique du Nord juin 2018

EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée E(X), est égale à : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}\, d\, t$

Le but de cette partie est de démontrer que E(X) = 5.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par $g(t) = 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}$.

On définit la fonction G sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par $G(t) = (-t-5)\, e^{-0,2\, t}$.

Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle [0 ; + ∞ [.

2. En déduire que la valeur exacte de E(X) est 5.

Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-0,2\, x} = 0$.

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.

Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ. Grâce à cette étude, on estime que P(T < 10) = 0,067.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

2. Dans cette question, on prend σ = 20 minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2 min^{-1}.

a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;

$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

CORRECTION

Partie A - Démonstration préliminaire

1. Soit $\begin{cases} u(t) = -t-5 & u'(x) = -1 \\ v(x) = e^{-0,2\, t} & v'(x) = -0,2\, e^{-0,2\, t} \end{cases}$ alors $G'(t) = -\, e^{-0,2\, t} + (-t-5)\,(-0,2\, e^{-0,2\, t})$

$G'(t) = [-1 + 0,2\, t + 1]\, e^{-0,2\, t} = 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}$ donc $G'(t) = g(t)$ donc G est une primitive de g sur l'intervalle [0 ; + ∞ [.

2. $\int_0^x 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}\, d\, t = G(x) - G(0) = (-x-5)\, e^{-0,2\, x} + 5$

$\int_0^x 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}\, d\, t = -x\, e^{-0,2\, x} - 5\, e^{-0,2\, x} + 5$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-0,2\, x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,2\, x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x 0,2\, t\, e^{-0,2\, t}\, d\, t = 5$

La valeur exacte de E(X) est 5.

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1. Soit $Z = \dfrac{T-40}{\sigma}$, Z suit une loi normale centrée réduite et $P\left(Z < \dfrac{10-40}{\sigma}\right) = 0{,}067$ donc $\dfrac{-30}{\sigma} \approx -1{,}4985$ donc $\sigma \approx \dfrac{30}{1{,}4985}$

$\sigma \approx 20{,}0198$ min soit 20 minutes et 1 seconde ($0{,}0198 \times 60 = 1{,}188$)

2. $P(T > 60) = 0{,}159$ (à la calculette) donc environ 15,9 % des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

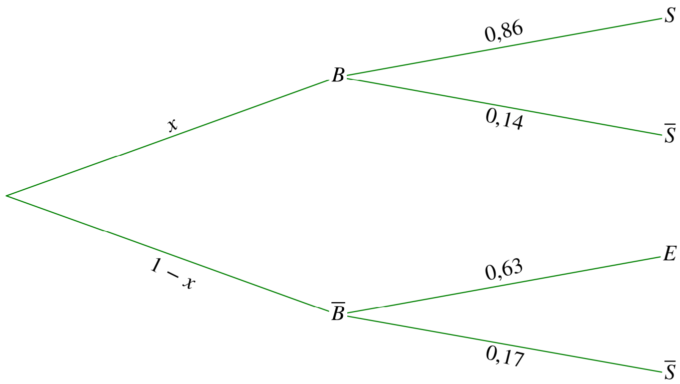
Partie C - Durée d'attente pour le paiement

1. *a.* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement est de $\dfrac{1}{0{,}2}$ soit 5 minutes.

b. $P(X > 10) = e^{-10\lambda} = e^{-2} \approx 0{,}135$

2. $P(S) = 0{,}86\,x + 0{,}63\,(1-x) = 0{,}63 - 0{,}23$

$P(S) > 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}63 + 0{,}23\,x > 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}23\,x > 0{,}12 \Leftrightarrow x > \dfrac{12}{23}$



La proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint est $\dfrac{12}{23}$ soit environ 52 %

Partie D - Bons d'achat

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 € donc obtient 15 cartes.

On a une succession de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- succès : le client obtient une carte gagnante ($p = 0{,}005$)
- échec : le client n'obtient pas une carte gagnante ($q = 1 - p = 0{,}995$)

donc la variable aléatoire J qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 15$ épreuves, suit une loi binomiale de paramètres (15 ; 0,005).

$P(J \geq 1) = 1 - P(J = 0) \approx 1 - 0{,}995^{15} \approx 0{,}07$

2. Soit n le nombre de cartes obtenues, pour les mêmes raisons que précédemment, la variable aléatoire G qui est égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves, suit une loi binomiale de paramètres (n ; 0,005).

$P(G \geq 1) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - P(G = 0) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow P(G = 0) \leq 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}005^{n} \leq 0{,}5 \Leftrightarrow n \ln 0{,}005 \leq \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}005} \Leftrightarrow n \geq 139$

$\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}005} \approx 138{,}3$ donc le premier nombre entier supérieur à $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}005}$ est 139