Les quatre questions sont indépendantes.

1. *a*. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation

$$(E)\ 11\,x - 5\,y = 14.$$

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. *a*. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3}{2}(1 - \mathrm{i})\,z + 4 - 2\,\mathrm{i}$

4. On considère l'algorithme suivant où $\mathrm{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ≤ √A
        Si A/N – Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N
        Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

CORRECTION

1. *a*. $11 \times 4 - 5 \times 6 = 44 - 30 = 14$ donc le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) $11\,x - 5\,y = 14$.

b. $\begin{cases} 11\,x - 5\,y = 14 \\ 11 \times 4 - 5 \times 6 = 14 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :

$11\,(x - 4) - 5\,(y - 6) = 0$ soit $11\,(x - 4) = 5\,(y - 6)$

11 divise $5\,(y - 6)$ or 5 et 11 sont premiers entre eux donc 11 divise $y - 6$

$y - 6 = 11\,k$ donc en remplaçant dans $11\,(x - 4) = 5\,(y - 6)$:

$11\,(x - 4) = 5 \times 11\,k$ soit $x - 4 = 5\,k$

Vérification :si $x = 5\,k + 4$ et $y = 11\,k + 6$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $11\,x - 5\,y = 14$

Les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E) sont de la forme ($5\,k + 4$; $11\,k + 6$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. *a*. $2^3 = 8$ donc $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ donc $(2^3)^n \equiv 1 \pmod 7$. soit $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$

.

b. $2011 = 7 \times 287 + 2$ donc $2011 \equiv 2 \pmod 7$.

$2012 = 3 \times 670 + 2$

$2011^3 \equiv 2^3 \pmod 7$ donc $2011^{3 \times 670} \equiv 1 \pmod 7$.

$2011^{2012} \equiv 2011^2 \pmod 7$ soit $2011^{2012} \equiv 2^2 \pmod 7$.

Le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7 est 4.

3. L'écriture complexe de f est de la forme $f(z) = a\,z + b$ avec $a \neq 0$ donc f est une similitude directe.

$a = \frac{3}{2}(1 - \mathrm{i})$ donc $|\,a\,| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ et $\arg a = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ donc f est la similitude directe de rapport $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

$z = \frac{3}{2}(1 - \mathrm{i})\,z + 4 - 2\,\mathrm{i}$ donc $2\,z - 3\,(1 - \mathrm{i})\,z = 8 - 4\,\mathrm{i}$

$(-1 + 3\,\mathrm{i})\,z = 8 - 4\,\mathrm{i}$ donc $(1 - 3\,\mathrm{i})\,(1 + 3\,\mathrm{i})\,z = (1 + 3\,\mathrm{i})\,(8 - 4\,\mathrm{i})$

$10\,z = 8 - 4\,\mathrm{i} + 24\,\mathrm{i} + 12 = 20 + 20\,\mathrm{i}$ donc $z = 2 + 2\,\mathrm{i}$

f a pour centre le point Ω d'affixe $2 + 2\,\mathrm{i}$.

4. Avec A =12, la boucle « tant que » de l'algorithme est répétée 3 fois (car $3 < \sqrt{12} < 4$) :

N	$\dfrac{A}{N}$	Ent(A/N)	$\dfrac{A}{N} - \text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right) = 0$?	Affichage
1	12	12	oui	$N = 1$; $\dfrac{A}{N} = 12$
2	6	6	oui	$N = 2$; $\dfrac{A}{N} = 6$
3	4	4	oui	$N = 3$; $\dfrac{A}{N} = 4$

Le test « si $\dfrac{A}{N} - \text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right) \neq 0$ » sert à détecter si la division de A par N « tombe juste », c'est-à-dire si N divise A. Si c'est le cas on affiche N et $\dfrac{A}{N}$ qui sont alors tous deux des diviseurs de A avec $N \leq \sqrt{A}$ et $\dfrac{A}{N} \geq \sqrt{A}$.

Au final cet algorithme permet donc d'afficher **tous les diviseurs de** A.