1. Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
2. Le joueur suivant les règles suivantes :
- Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points
- Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
- Dans les autres cas il gagne 15 points.

Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus par lui.

a. Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.

b. Représentez graphiquement la fonction de répartition de X.

Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres.
On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.

c. Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y?

d. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points?

e. Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points?

Le joueur joue *n* parties de suite.

f . Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points?

g. A partir de quelle valeur de *n* sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Correction

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles après le lancer des deux dés.
Ici, Ω correspond au produit cartésien $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\} \times \{1 , 2 , 3 , 4, 5 , 6\}$.
Son cardinal est Card (Ω) = $6^2 = 36$.

Comme on suppose qu'il y a équiprobabilité des résultats des lancers, on a alors : Pour tout événement A de Ω, $p(\text{A}) = \dfrac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)}$

a : La variable aléatoire X peut prendre les valeurs – 10 , – 5 , + 15.
L'événement "X = – 10" est l'événement "obtenir le même numéro".
C'est donc l'événement A = {(1 ; 1) ; (2 ; 2) ; (3 ; 3) ; (4 ; 4) ; (5 ; 5) ; (6 ; 6) }.
La probabilité de "X = – 10" est donc : $p(\text{ X} = -10) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

De même, l'événement "X = – 5" est l'événement "obtenir 2 numéros de parités différentes".
C'est donc l'ensemble des couples (*a* ; *b*) tels que *a* soit dans {1 ; 3 ; 5} et *b* soit dans {2 ; 4 ; 6} ou bien *a* soit dans {2 ; 4 ; 6} et *b* soit dans {1 ; 3 ; 5}.
La cardinal de cet événement est donc : $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$.

D'où : $p(\text{ X} = -5) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Comme $\sum_k p(\text{X} = k) = 1$; on en déduit que : $p(\text{X} = 15) = 1 - p(\text{X} = -10) - p(\text{X} = -5)$.

D'où : $p(\text{X} = 15) = 1 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

On résume cela sous la forme d'un tableau :

X = *k*	– 10	– 5	15
p(X = *k*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

L'espérance de X est alors : $\text{E[X]} = \sum_k k \times p(\text{X} = k)$

$\text{E[X]} = \dfrac{1}{6} \times (-10) + \dfrac{1}{2} \times (-5) + \dfrac{1}{3} \times 5$ d'où : E[X] = – 2,5.

b : La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur ℝ par : pour tout *x* réel ; $\text{F}(x) = p(\text{ X} \le x)$.
D'après le tableau de la loi de probabilité de X ; on en déduit que :

Si $x < -10$ alors $\text{F}(x) = 0$.

Si $-10 \le x < -5$ alors $\text{F}(x) = \dfrac{1}{6}$

Si $-5 \le x < 15$ alors $\text{F}(x) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$.

Si $x \ge 15$ alors $\text{F}(x) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = 1$.

D'où la courbe de la fonction de répartition de X.

c : Si le joueur effectue 10 parties de suite dont les résultats sont indépendants les uns des autres, comme pour chaque partie, la probabilité d'obtenir 15 points est constante et égale à $\dfrac{1}{3}$; on peut dire que la variable aléatoire Y égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points en 10 parties suit un loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

Y suit donc la loi B(10 ; 1/3)

Pour entier k ; on a : $p(Y = k) = C_{10}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$

d : La probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points est : $p(Y > 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (2/3)^{10}$

$p(Y > 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (2/3)^{10} = \frac{58025}{59049}$

e : Le nombre de fois que le joueur peut espérer gagner 15 points en 10 parties est l'espérance de la variable aléatoire Y.
On sait que pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre (n ; p) ; l'espérance de X est : $E[X] = n \cdot p$

Comme Y a pour paramètre $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$; on en déduit que l'espérance de Y est : $E[Y] = \frac{10}{3}$:

Si le joueur joue n parties de suite alors la variable aléatoire Z égale au nombre de fois où il gagne 15 points suit une loi binomiale de paramètre (n ; $p = 1/3$).
La probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points durant ces n parties est alors :
$p(Z \geq 1) =1 - p(Z = 0)$
Comme $p(Z = 0) = (2/3)^{n}$; on a alors $p(Z \geq 1) = 1 - (2/3)^{n}$

g : On veut alors que $p(Z \geq 1) \geq 0{,}9999$. Ou encore que : $1 - (2/3)^{n} \geq 0{,}9999$.
ou encore que $(2/3)^{n} \leq 0{,}0001$. En utilisant la fonction logarithme népérien ; on peut alors écrire que :

$n \geq \frac{\ln 0{,}0001}{\ln (2/3)}$ soit $n \geq 23$