On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125\, j_n + 0{,}525\, a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625\, j_n + 0{,}625\, a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

1. *a*. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.
b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un
an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.
2. On introduit les matrices suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. On admet que la matrice Q est inversible et que :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.
3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n & 0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n & 0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}¶$$

a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.
b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

CORRECTION

1. *a*. $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125\, j_n + 0{,}525\, a_n \\ 0{,}625\, j_n + 0{,}625\, a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ donc pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ avec $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}125 \times 200 + 0{,}525 \times 500 \\ 0{,}625 \times 200 + 0{,}625 \times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc 287 animaux jeunes et 437 animaux adultes après un an d'observation.

$$U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265{,}625 \\ 453{,}125 \end{pmatrix}$$

Au bout de 2 ans il *y* aura 265 jeunes et 453 adultes après deux ans d'observation.

c. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = A^n \times U_0$

$U_1 = A \times U_0$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $U_n = A^n \times U_0$ alors $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.
$U_{n+1} = A \times U_n$ donc $U_{n+1} = A \times A^n \times U_0$ soit $U_{n+1} = A^{n+1} \times U_0$.
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul,
$U_n = A^n \times U_0$.

2. On introduit les matrices suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. $Q \times D = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.

$Q \times D \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ = A donc $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

$A = Q \times D \times Q^{-1}$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Montrons que pour tout entier naturel n non nul, si $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$ alors $A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$.
$A^{n+1} = A \times A^n$ donc $A^{n+1} = Q \times D \times Q^{-1} \times Q \times D^n \times Q^{-1}$
or $Q^{-1} \times Q = \text{Id}$ donc $A^{n+1} = Q \times D \times D^n \times Q^{-1}$
$A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$
La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n non nul, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. *a.* $U_n = A^n \times U_0$ donc $U_n = \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$

$U_n = \begin{pmatrix} 200\times(0,3+0,7\times(-0,25)^n)+500\,(0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 200\times(0,5-0,5\times(-0,25)^n)+500\,(0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$

$U_n = \begin{pmatrix} 60+140\times(-0,25)^n)+210-210\times(-0,25)^n \\ 100-100\times(-0,25)^n)+350+150\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$

$U_n = \begin{pmatrix} 270-70\times(-0,25)^n \\ 450+50\times(-0,25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$

donc $j_n = 270 - 70 \times (-0,25)^n$ et $a_n = 450 + 50 \times (-0,25)^n$.
$-1 < -0,25 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} (-0,25)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} j_n = 270$ et $\lim_{n \to +\infty} a_n = 450$

b. Le nombre d'animaux jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450 au bout de quelques années.