Antilles-Guyane septembre 2014

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

On donne en annexe la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en annexe, en utilisant la courbe C_f et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. *a*. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il calcule S_{100}.

Déclaration des variables :

S et u sont des nombres réels

k est un nombre entier

Initialisation :

u prend la valeur ......

S prend la valeur ......

Traitement :

Pour k variant de 1 à ....

u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$

S prend la valeur ....

Fin Pour

Afficher ….

CORRECTION

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

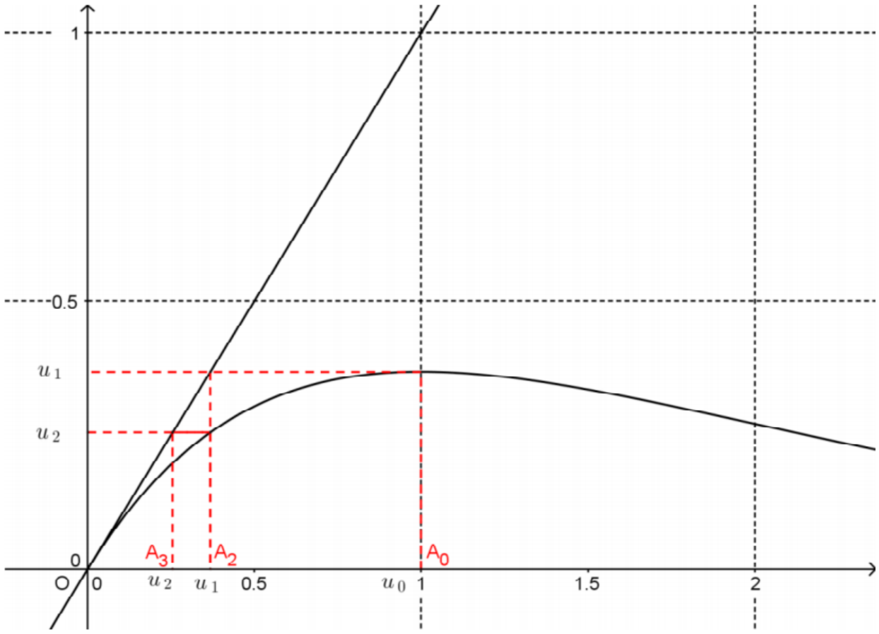
2. Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ donc $f'(x) = 1\,e^{-x} - x\,e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Partie B

1.



2. Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

Hérédité : montrons pour tout n de N, que si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$

$u_{n+1} = f(u_n) = u_n\,e^{-u_n}$. La fonction exponentielle est strictement positive sur R et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $u_n > 0$

3. $u_{n+1} - u_n = u_n\,e^{-u_n} - u_n = u_n\left(e^{-u_n} - 1\right)$ or $u_n > 0$ donc $-u_n < 0$ donc $e^{-u_n} < 1$ donc $e^{-u_n} - 1 < 0$ soit $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

4. *a.* La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc est convergente.

b. $x\,e^{-x} = x \Leftrightarrow x\,e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x\,(e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Partie C

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $S_0 = u$ 0

Déclaration des variables
 S et u sont des nombres réels
 k est un nombre entier
Initialisation
 u prend la valeur **1**
 S prend la valeur **1**
Traitement
 Pour k variant de 1 à **100**
  u prend la valeur $u \times e^{-u}$
  S prend la valeur **S + *u***
 Fin Pour
 Afficher **S**