ENONCE

PARTIE A : Question de cours
Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B
On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7$

$\overline{\beta\alpha7}^{12} = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711$ en base 10

1. *a.* Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^{12}$.
2. *a.* Démontrer que $N \equiv a_0$ (3). En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.
Confirmer avec son écriture en base 10.
3. *a.* Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0$ (11). En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.
Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

CORRECTION
PARTIE B
1. *a.* $N_1 = 10 + 12 + 11 \times 12^2 = 1606$

b. $N_2 = 12 \times 94 + 3 = 12\,(12 \times 7 + 10) + 3$ soit $N_2 = 12^2 \times 7 + 12 \times 10 + 3 = \overline{7\alpha3}^{12}$

2. *a.* $N = a_0 + a_1 \times 12 + \ldots + a_n \times 12^n$
$12 \equiv 0$ (3) donc pour tout k entier positif, $12^k \equiv 0$ (3) donc $N \equiv a_0$ (3).
N est divisible par 3 si et seulement si son chiffre des unités dans son écriture en base 12, est divisible par 3.

b. $N_2 = \overline{7\alpha3}^{12}$ or 3 est divisible par 3 donc N_2 est divisible par 3.
$N_2 = 1\,131$ or $1 + 1 + 3 + 1 = 6$ or 6 est divisible par 3 donc N_2 est divisible par 3.

3. *a.* $N = a_0 + a_1 \times 12 + \ldots + a_n \times 12^n$
$12 \equiv 1$ (11) donc pour tout k entier positif, $12^k \equiv 1$ (11) donc $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0$ (11).
N est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres dans son écriture en base 12, est divisible par 11.

b. $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$ or $11 + 1 + 10 = 2 \times 11$ donc N_1 est divisible par 11.
$N_1 = 1\,606 = 146 \times 11$ donc N_1 est divisible par 11.

4. $0 < x \leq 11$ et $0 \leq y \leq 11$
N est divisible par 33 si et seulement si il est divisible par 3 et par 11, il faut donc que 3 divise y et que 11 divise $x + 4 + y$
3 divise y donc $y = 0$; 3 ; 6 ; 9
Si $y = 0$, $x + 4 + y = x + 4$ or $0 < x \leq 11$ donc $4 < x + 4 \leq 15$
11 divise $x + 4$ si et seulement si $x + 4 = 11$ soit $x = 7$ donc $N = \overline{740}^{12}$

Si $y = 3$, $x + 4 + y = x + 7$ or $0 < x \leq 11$ donc $7 < x + 7 \leq 18$
11 divise $x + 7$ si et seulement si $x + 7 = 11$ soit $x = 4$ donc $N = \overline{443}^{12}$

Si $y = 6$, $x + 4 + y = x + 10$ or $0 < x \leq 11$ donc $10 < x + 10 \leq 21$
11 divise $x + 10$ si et seulement si $x + 10 = 11$ soit $x = 1$ donc $N = \overline{146}^{12}$

Si $y = 9$, $x + 4 + y = x + 13$ or $0 < x \leq 11$ donc $13 < x + 13 \leq 24$
11 divise $x + 13$ si et seulement si $x + 13 = 22$ soit $x = 9$ donc $N = \overline{949}^{12}$