ENONCE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{ -1 ; 1 \}$ par :

$f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier la fonction g.
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B. Etude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{ -1 ; 1 \}$:

$$f'(x) = \frac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$$

3\. *a*. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$:

$$f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$$

3\. *b*. Etudier la position de la courbe C par rapport à D d'équation $y = x + 2$.

3\. *c*. Montrer que la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

4\. Tracer la courbe C et la droite D.

CORRECTION

A. Etude d'une fonction auxiliaire

1\. g est un polynôme donc est définie continu dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

2\. Sur $]-\infty ; -1]$ g est croissante ; sur $[-1 ; 1]$ g est décroissante donc g admet un maximum en -1, $g(-1) = -2$ donc pour tout x de $]-\infty ; 1]$ $g(x) \le -2$.

L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty ; 1]$.

Sur $[1 ; +\infty[$, g est définie continue, strictement croissante,

$g([1 ; +\infty[) = [-6 ; +\infty[$,

$0 \in [-6 ; +\infty[$, donc il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$

$g(2{,}19) < 0$ et $g(2.20) > 0$ donc $2{,}19 < \alpha < 2{,}20$

3\.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

B. Etude de la fonction *f*

1\. f est une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) donc sa limite en $+\infty$ et $-\infty$ est la même que celle du quotient de ses termes de plus haut degré

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} x^3 + 2x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1} x^2 - 1 = 0$

Il faut donc préciser le signe de $x^2 - 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	−	0	+	

donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x^2 - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x^2 - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} x^3 + 2x^2 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$

Il faut donc préciser le signe de $x^2 - 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^2 - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x^2 - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$

2\. $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x[(3x + 4)(x^2 - 1) - 2(x^3 + 2x^2)]}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		−	‖	−	0	+	‖	+		+	
$g(x)$		−	‖	−		−	‖	−	0	+	
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

3\. *a*. $x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1} = (x+2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2-1}\right) = \dfrac{(x\ +\ 2)\,x^2}{x^2\ -\ 1}$

$x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2-1} = f(x)$.

3\. *b*. Soit $h(x) = f(x) - (x + 2) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+		+	0	−	0	+	
$x + 2$		−	0	+		+		+	
$h(x)$		−	0	+	‖	−	‖	+	

Donc sur $]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[$ $f(x) - (x + 2) < 0$

La courbe C est en dessous de la droite D.

Donc sur $]-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ $f(x) - (x + 2) > 0$

La courbe C est au dessus de la droite D.

La courbe et la droite se coupent au point d'abscisse 2.

3\. *c*. Montrer que la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

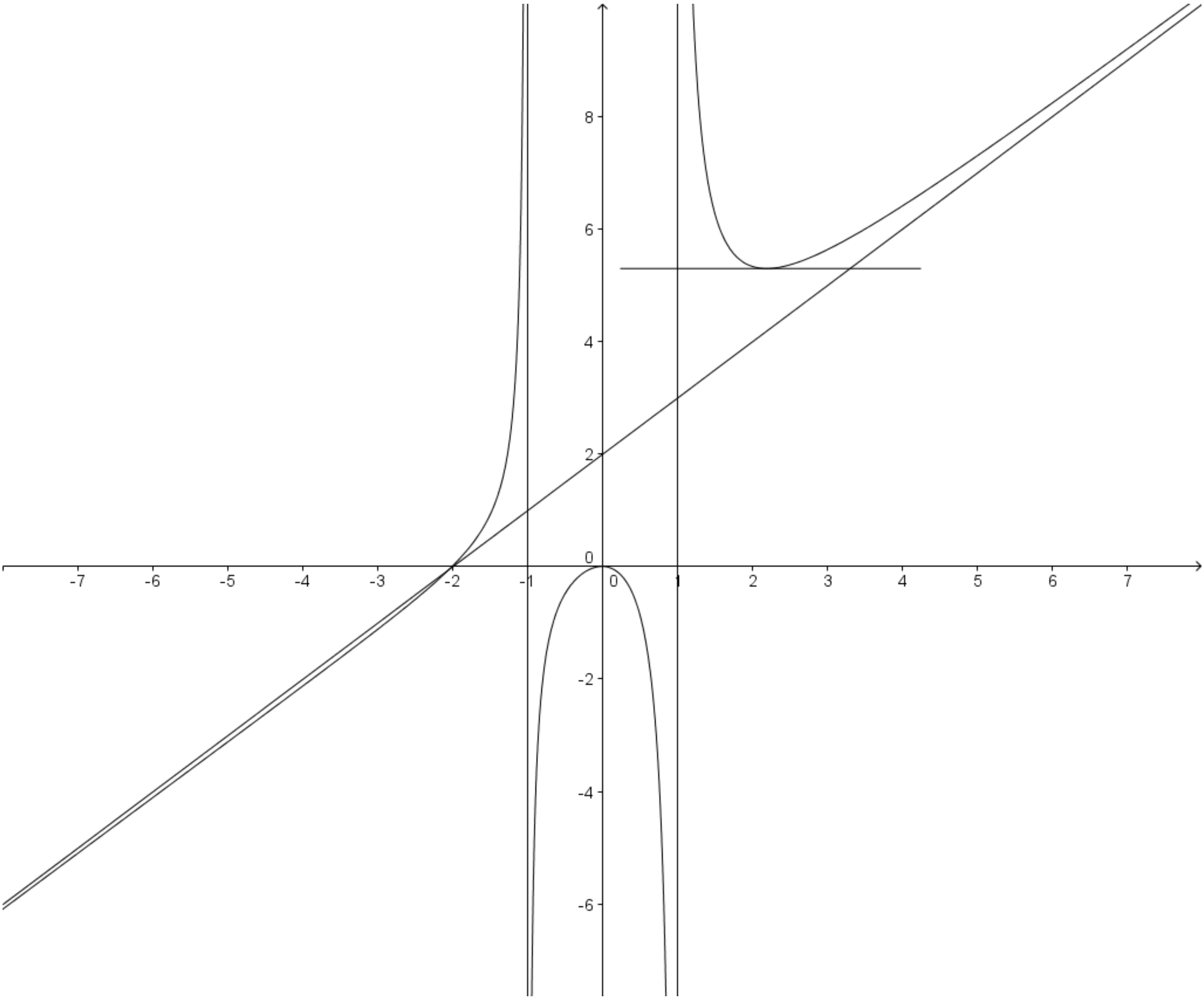
soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x + 2) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x + 2) = 0$

la courbe C admet D pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

4\. Tracer la courbe C et la droite D.


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7