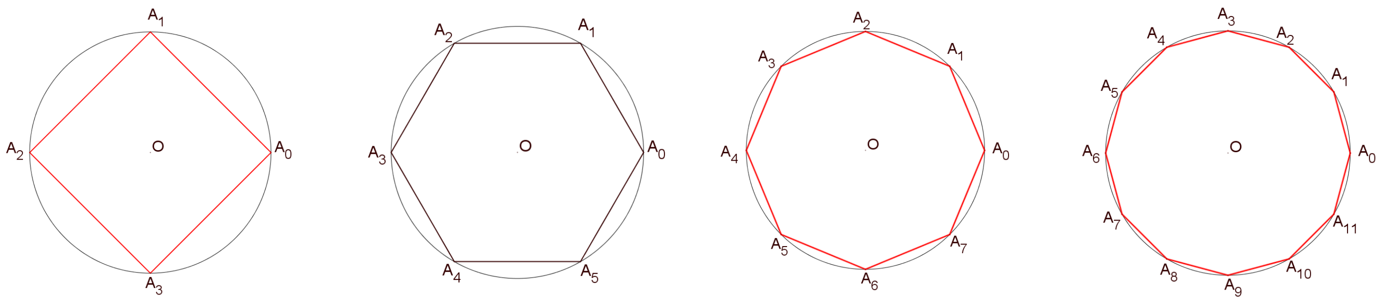
Le but de ce problème est de créer un algorithme permettant d'obtenir des approximations du nombre π.

Partie A : Une suite qui converge vers π

On considère un cercle C de centre O et de rayon 1, et un polygone régulier P_n à n côtés, inscrit dans C.

$n = 4$ $n = 6$ $n = 8$ $n = 12$



Pour tout $n \geq 3$, on notre p_n le périmètre de P_n.

1. Expliquer brièvement, par de simples considérations géométriques et sans calcul, pourquoi on peut conjecturer que la suite (p_n) tend vers 2π lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite, on pose $a_n = \dfrac{p_n}{2}$ (C'est le demi-périmètre de P_n.). La suite (a_n) est donc une suite qui semble converger vers π.

2. Justifier que chaque côté de P_n mesure $2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ et en déduire que $a_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

3. Prouver, cette fois-ci à l'aide de calcul, qu'on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \pi$.

4. On évalue la vitesse de convergence d'une suite (u_n) convergeant vers ℓ par $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$.

La vitesse de convergence est comprise entre 0 (convergence rapide) à 1 (convergence lente)
Grâce à un logiciel de calcul formel (Xcas), donner la vitesse de convergence de la suite (a_n).

Partie B : Une suite extraite

On considère maintenant la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Cette suite est dite "extraite" de la suite (a_n) puisqu'on se contente d'en prendre les termes dont les indices sont des puissances de 2. Elle converge vers π aussi.

5. Grâce à un logiciel de calcul formel (Xcas), donner la vitesse de convergence de la suite (u_n).
6. Avec un tableur, faire calculer les cent premiers termes des suites (a_n) et (b_n). Comparer.

(Dans la colonne A, vous mettrez les valeurs de n, dans la colonne B, les valeurs de (a_n) dans la colonne C, les valeurs de (u_n))

La suite (u_n) pose un problème important : on ne peut pas l'*utiliser telle quelle pour obtenir une approximation de π puisque* … il y a *déjà π dans son expression ! Il faut essayer contourner ce problème.*
Nous allons montrer que l'*on peut donner une expression par récurrence de la suite (u_n).*

Partie C

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

7. En utilisant une formule de duplication, montrer que u_n peut aussi s'écrire $u_n = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

On pose $c_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Remarquons que pour $n \geq 1$, on a $c_n \geq 0$ et pour $n \geq 2$, on a $c_n > 0$.

8. Montrer que $c_n = 2c_{n+1}^2 - 1$

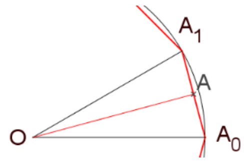
9. Déduire des questions 7 et 8 que : $\begin{cases} c_1 = 0, u_1 = 2 \\ \forall\, n \geq 1, c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}} \\ \forall\, n \geq 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{c_n + 1} \end{cases}$.

10. Compléter la feuille de tableur de la question 6 par les valeurs de (c_n) en colonne E et celles de la suite (u_n) en colonne F, calculées avec le procédé de récurrence obtenu à la question 9. Vérifier que les colonnes C et F sont identiques.

CORRECTION

1. Lorsque n tend vers $+\infty$, le polygone P_n tend à se confondre avec le cercle C donc le périmètre p_n de P_n tend vers celui de C soit 2π.

2. Le polygone P_n est régulier donc tous les angles au centre $\widehat{A_k O A_{k+1}}$ $(0 \le k \le n-1)$ sont égaux à $\frac{2\pi}{n}$. Chaque côté de P_n mesure $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$



Soit A le milieu de $[A_0A_1]$. Dans le triangle isocèle OA_0A_1, la médiane (OA) est aussi hauteur et bissectrice de $\widehat{A_0OA_1}$ donc le triangle OAA_0 est rectangle en A et $\widehat{A_0OA} = \frac{\pi}{n}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{AA_0}{OA_0} = AA_0$ donc $A_0A_1 = 2\,AA_0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Le polygone P_n a n côtés donc son périmètre p_n est égal à $n\,A_0A_1 = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ donc $a_n = \frac{p_n}{2} = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

3. Soit $x = \frac{\pi}{n}$, alors $n = \frac{\pi}{x}$ donc $n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi\frac{\sin x}{x}$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} x = 0$ or $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi$.

4. (a_n) converge vers π, il suffit donc de demander $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)-\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)-\pi}$,

D'après XCas : limite(((n+1)*sin(pi()/(n+1))-pi())/(n*sin(pi()/n)-pi()),n,+infinity) = 1 soit $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}-\pi}{a_n-\pi}\right| = 1$, la vitesse est lente.

Partie B : Une suite extraite

5. $$\frac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi} = \frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)-\pi}{2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)-\pi} = 2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)-\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)-\frac{\pi}{2^n}}$$

D'après XCas : limite(((sin(pi()/(2^(n+1))-pi()/2^(n+1))/(sin(pi()/(2^n))-pi()/2^n),n,+infinity) = 0 soit $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi}\right| = 0$, la vitesse est rapide.

6. Voir à la fin de l'exercice.

7. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ donc $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, en posant $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$ alors $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ donc :

$u_n = 2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2^2\times 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

8. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ donc $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$, en posant $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$ alors $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ donc :

$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1$ soit $c_n = 2c_{n+1}^2 - 1$.

9. $c_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $u_1 = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

pour tout $n \ge 1$, $c_n = 2c_{n+1}^2 - 1$ donc $2c_{n+1}^2 = 1 + c_n$ soit $c_{n+1}^2 = \frac{1+c_n}{2}$, pour tout $n \ge 1$, $c_n \ge 0$ donc $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$.

$u_n = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) c_{n+1}$

$u_{n+1} = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ donc $u_n = u_{n+1}\, c_{n+1}$,

Si $n \geq 1$, $n + 1 \geq 2$ donc $c_{n+1} > 0$ donc $c_{n+1} \neq 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{c_{n+1}}$. On a bien $\begin{cases} c_1 = 0,\ u_1 = 2 \\ \forall\ n \geq 1,\ c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + c_n}{2}} \\ \forall\ n \geq 1,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{c_{n+1}} \end{cases}$.

10.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a_n	u_n		c_n	u_n	
2	1	0	2		0	2	0
3	2	2	2,828427124746		0,707106781	2,828427124746	0
4	3	1,732050807569	3,061467458921		0,923879533	3,061467458921	0
5	4	1,414213562373	3,121445152258		0,98078528	3,121445152258	0
6	5	1,175570504585	3,136548490546		0,995184727	3,136548490546	0
7	6	1,000000000000	3,140331156955		0,998795456	3,140331156955	0
8	7	0,867767478235	3,141277250933		0,999698819	3,141277250933	0
9	8	0,765366864730	3,141513801144		0,999924702	3,141513801144	0
10	9	0,684040286651	3,141572940367		0,999981175	3,141572940367	0
11	10	0,618033988750	3,141587725277		0,999995294	3,141587725277	0
12	11	0,563465113683	3,141591421511		0,999998823	3,141591421511	0
13	12	0,517638090205	3,141592345570		0,999999706	3,141592345570	0
14	13	0,478631328575	3,141592576585		0,999999926	3,141592576585	0
15	14	0,445041867913	3,141592634339		0,999999982	3,141592634339	0
16	15	0,415823381636	3,141592648777		0,999999995	3,141592648777	0
17	16	0,390180644032	3,141592652387		0,999999999	3,141592652387	0
18	17	0,367499035633	3,141592653289		1	3,141592653289	0
19	18	0,347296355334	3,141592653515		1	3,141592653515	0
20	19	0,329189180561	3,141592653571		1	3,141592653571	0
21	20	0,312868930080	3,141592653585		1	3,141592653585	0
22	21	0,298084532352	3,141592653589		1	3,141592653589	0
23	22	0,284629676547	3,141592653590		1	3,141592653590	0

Formules utilisées :

en A3 :	en B3 :	en C3 :	en E3 :	en F3 :	en G3
=A2+1	=A3*sin(PI())/A3)	=2^B3*sin(PI()/2^B3)	=racine((1+E2)/2)	=F2/E3	=F3-C3

On peut bien vérifier que les colonnes C et F sont identiques

La longueur de chaque mot donne une décimale (un mot de 10 lettres code zéro). La ponctuation ne code rien.

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !	3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Immortel Archimède, artiste ingénieur,	8 9 7 9
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?	3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.	4 3 3 8 3 2 7 9
Jadis, mystérieux, un problème bloquait	5 0 2 8 8
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose	4 1 9 7 1 6 9
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.	3 9 9 3 7 5
O quadrature ! Vieux tourment du philosophe	1 0 5 8 2 9
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez	9 7 4 9 4 4
Défié Pythagore et ses imitateurs.	5 9 2 3 0
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?	7 8 1 6 4 0
Former un triangle auquel il équivaudra ?	6 2 8 6 2 0
Nouvelle invention : Archimède inscrira	8 9 9 8
Dedans un hexagone ; appréciera son aire	6 2 8 0 3 4
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :	8 2 5 3 4 2 1 1 7
Dédoublera chaque élément antérieur ;	0 6 7 9
Toujours de l'orbe calculée approchera ;	8 2 1 4 8 0
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur	8 6 5 1 3 2 8
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle	2 3 0 6 6 4 7
Professeur, enseignez son problème avec zèle	0 9 3 8 4 4

Un autre plus court
Car j'aime à faire apprécier ce nombre, objet des soins patients, longtemps répétés, engendrés par ce dur problème grec : "carrer" le cercle. Même son nom habituel est un symbole (périmètre) utile.