Asie juin 2011

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

On note *f* ' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

On note C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). La courbe C_f est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a. Déterminer les limites de la fonction *f* en 0 et en + ∞.

b. Calculer la dérivée *f* ' de la fonction *f* .

c. En déduire les variations de la fonction *f* .

2. Étude d'une fonction *g*

On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note C*g* la courbe représentative de la fonction *g* dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a. Déterminer la limite de *g* en 0, puis en + ∞.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b. Calculer la dérivée *g* ' de la fonction *g* .

c. Dresser le tableau de variation de la fonction *g* .

3. a. Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C_g.

4. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

En exprimant l'aire A comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire A.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5\,\mathrm{i}$ et $c = 4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.

La figure est donnée en **annexe 2**.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation *r* de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe – 7 + 2 i.

On admettra que l'affixe du point K est – 2 – 6 i.

2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [JC] ont la même longueur. Calculer cette longueur.

3. a. Calculer les affixes des points S et T.

b. Déterminer l'affixe du point U.

c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.

4. Déterminer une mesure de l'angle ($\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{AU}$).

5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0{,}752 + 0{,}864\,\mathrm{i}$.

a. Établir que les points A, V et U sont alignés.

b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{BVC}$?

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère (D ; $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$).

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

A(1 ; 0 ; 0) B(1 ; 1 ; 0) C(0 ; 1 ; 0) D(0 ;0 ; 0) E(1 ;0 ; 1) F(1 ; 1 ; 1) C(0 ; 1 ; 1) H(0 ;0 ; 1)

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

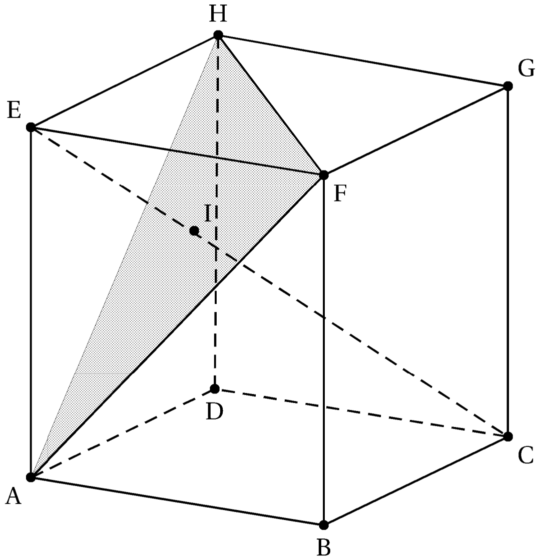
e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF). Que représente le point I pour le triangle AFH?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par : $F(t) = p(X \leq t) = p([0 ; t]) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

b. $p(\overline{A}) = = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

c. $p([a ; b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leq b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a : $p_{[t\,;\,+\infty[}([t ; t+s]) = \dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$, et que $p_{[t\,;\,+\infty[}([t ; t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives : $\Gamma : z = x y$ et $C : x^2 + z^2 = 1$.

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. **Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C**

a. Démontrer que les coordonnées $(x ; y ; z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que : $x^2 (1 + y^2) = 1$.

b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. **Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan**

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 2$.

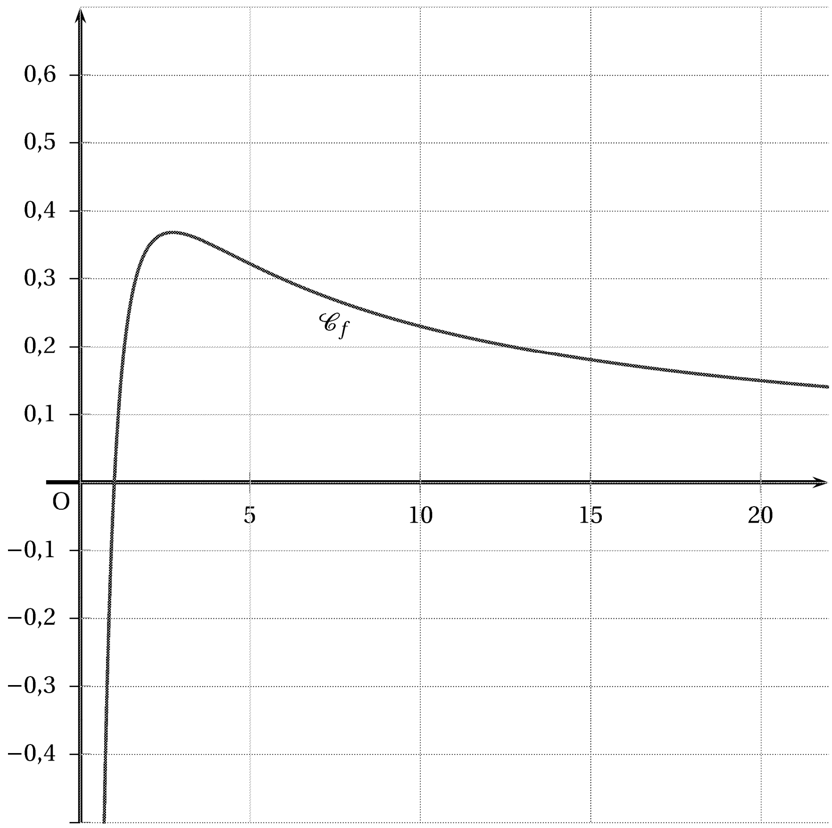
b. Vérifier que : $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$

c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geq 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

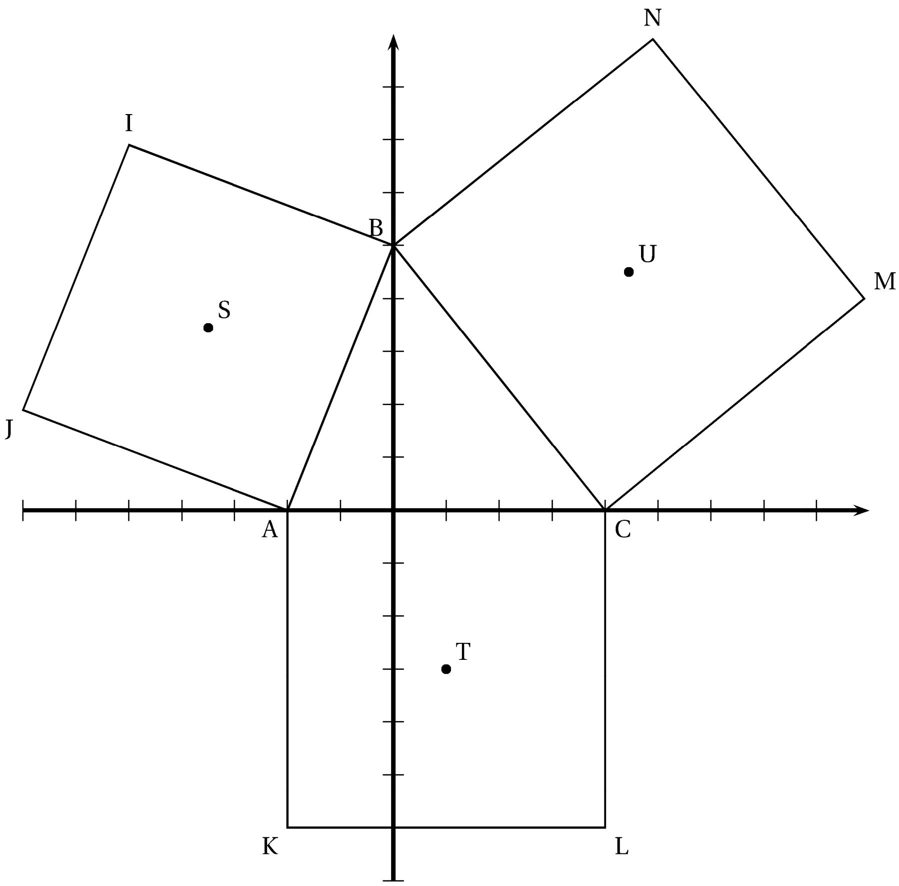
d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)



CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. La courbe C_f est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b. Soit $\begin{cases} u(x) = \ln x \quad \text{alors} \quad u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \quad \text{alors} \quad v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $f'(x) = \dfrac{x \times \frac{1}{x} - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - \ln x$ or $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}$

c.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Étude d'une fonction *g*

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note Cg la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2$ or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$

$\ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$ donc $\ln x = 2\ln\sqrt{x}$ donc $(\ln x)^2 = 4(\ln\sqrt{x})^2$ donc $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

Soit $X = \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

b. Soit $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \quad \text{alors} \quad u'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}\ln x \\ v(x) = x \quad \text{alors} \quad v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $g'(x) = \dfrac{x \times 2 \times \frac{1}{x}\ln x - 1 \times (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{(2 - \ln x)\ln x}{x^2}$

c.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - \ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

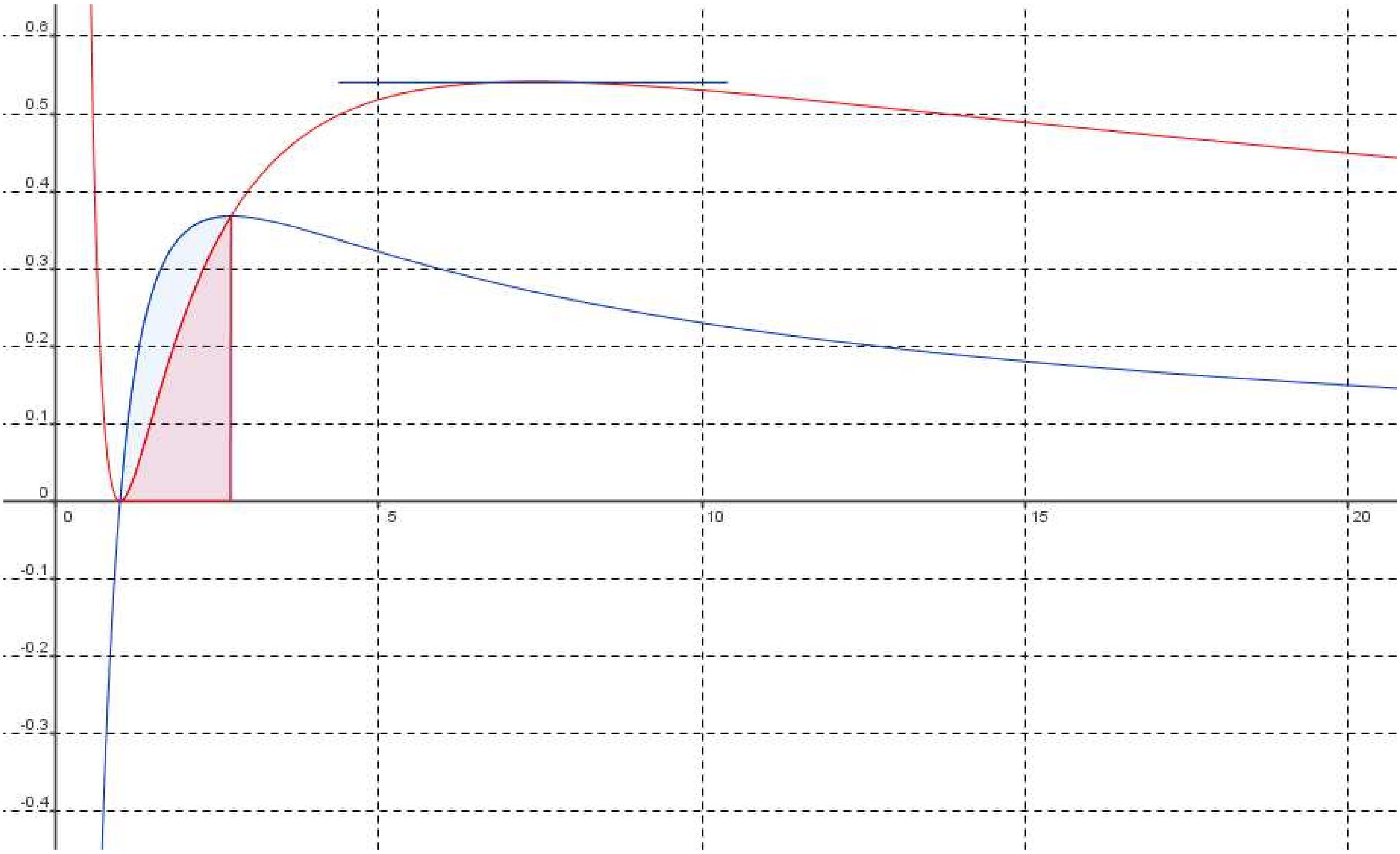
3. *a.* $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x > 0$ et $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{(\ln x)^2}{x} \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x = (\ln x)^2 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \mathrm{e}$

Les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs de coordonnées $(1\,;0)$ et $(\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^{-1})$.

b. $f(x) - g(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \dfrac{\ln x\,(1 - \ln x)}{x}$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		C_f en dessous de C_g	point d'intersection	C_f au dessus de C_g	point d'intersection	C_f en dessous de C_g	

.



4. Sur [1 ; e], la courbe C_f au dessus de C_g donc l'aire A est la différence des aires bleues et rouge.

A = $\int_1^e f(x)\,dx - \int_1^e g(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln x\,(1-\ln x)}{x}\,dx$

Soit $u(x) = \ln x$ alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ donc $\frac{\ln x\,(1-\ln x)}{x} = u'(x)\,u(x) - u'(x)\,[u(x)]^2$

Une primitive de $x \to u'(x)\,u(x) - u'(x)\,[u(x)]^2$ est la fonction $x \to \frac{1}{2}[u(x)]^2 - \frac{1}{3}[u(x)]^3$

Une primitive de $x \to \frac{\ln x\,(1-\ln x)}{x}$ est la fonction F : $x \to \frac{1}{2}[\ln(x)]^2 - \frac{1}{3}[\ln(x)]^3$

donc A = F(e) – F(1) = $\frac{1}{2}[\ln(e)]^2 - \frac{1}{3}[\ln(e)]^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ *u.a.*

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

1. L'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - a)$ soit $z' = \mathrm{i}\,z - a\,\mathrm{i} + a$ donc $z' = \mathrm{i}\,z - 2\,\mathrm{i} + 2$

le carré ABIJ est indirect donc J est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $z_J = \mathrm{i}\,b - 2 + 2\,\mathrm{i}$

$z_J = -5 - 2\,\mathrm{i} + 2$ donc le point J a pour affixe $z' = -7 - 2\,\mathrm{i}$.

2. $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $(-2 ; -11)$ et $\overrightarrow{JC}$ a pour coordonnées $(11 ; -2)$ donc $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{JC} = -2 \times 11 + (-11) \times (-2) = 0$ donc les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires

$BK^2 = (-2)^2 + (-11)^2 = 125$ et $JC^2 = 11^2 + (-2)^2 = 125$ donc les segments [BK] et [JC] ont la même longueur $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

3. *a.* S est le centre du carré ABIJ donc est le milieu de [AI] donc l'affixe de S est $\frac{-2-7+2\,\mathrm{i}}{2} = \frac{-9}{2} + \mathrm{i}$

T est le centre du carré AKLC donc est le milieu de [CK] donc l'affixe de T est $\frac{4-2-6\,\mathrm{i}}{2} = 1 - 3\,\mathrm{i}$

b. N est l'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $z_N = \mathrm{i}\,(c - b) + b = \mathrm{i}\,(4 - 5\,\mathrm{i}) + 5\,\mathrm{i} = 5 + 9\,\mathrm{i}$

U est le centre du carré BCMN donc est le milieu de [CN] donc $z_U = \frac{4+5+9\,\mathrm{i}}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\,\mathrm{i}$

c. $\overrightarrow{AU}$ a pour coordonnées $(6{,}5 ; 4{,}5)$ et $\overrightarrow{ST}$ a pour coordonnées $(4{,}5 ; -6{,}5)$ donc $\overrightarrow{AU} \cdot \overrightarrow{ST} = 6{,}5 \times 4{,}5 + 4{,}5 \times (-6{,}5) = 0$ donc les droites (AU) et (ST) sont perpendiculaires donc la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.

4. $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}) = \arg\left(\frac{u-a}{c-j}\right)$ or $u - a = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\,\mathrm{i} + 2 = \frac{13}{2} + \frac{9}{2}\,\mathrm{i}$ et $c - j = 11 - 2\,\mathrm{i}$

donc $\frac{u-a}{c-j} = \frac{1}{2} \times \frac{13+9\,\mathrm{i}}{11-2\,\mathrm{i}} = \frac{1}{2} \times \frac{(13+9\,\mathrm{i})\,(11+2\,\mathrm{i})}{121+4}$

$\frac{u-a}{c-j} = \frac{1}{2} \times \frac{143+26\,\mathrm{i}+99\,\mathrm{i}-18}{125} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ or $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

5. *a.* $\overrightarrow{AV}$ a pour coordonnées $(1{,}248 ; 0{,}864)$ et $\overrightarrow{AU}$ a pour coordonnées $(6{,}5 ; 4{,}5)$ donc $\overrightarrow{AU} = \frac{125}{4}\overrightarrow{AV}$ donc les points A, V et U sont alignés.

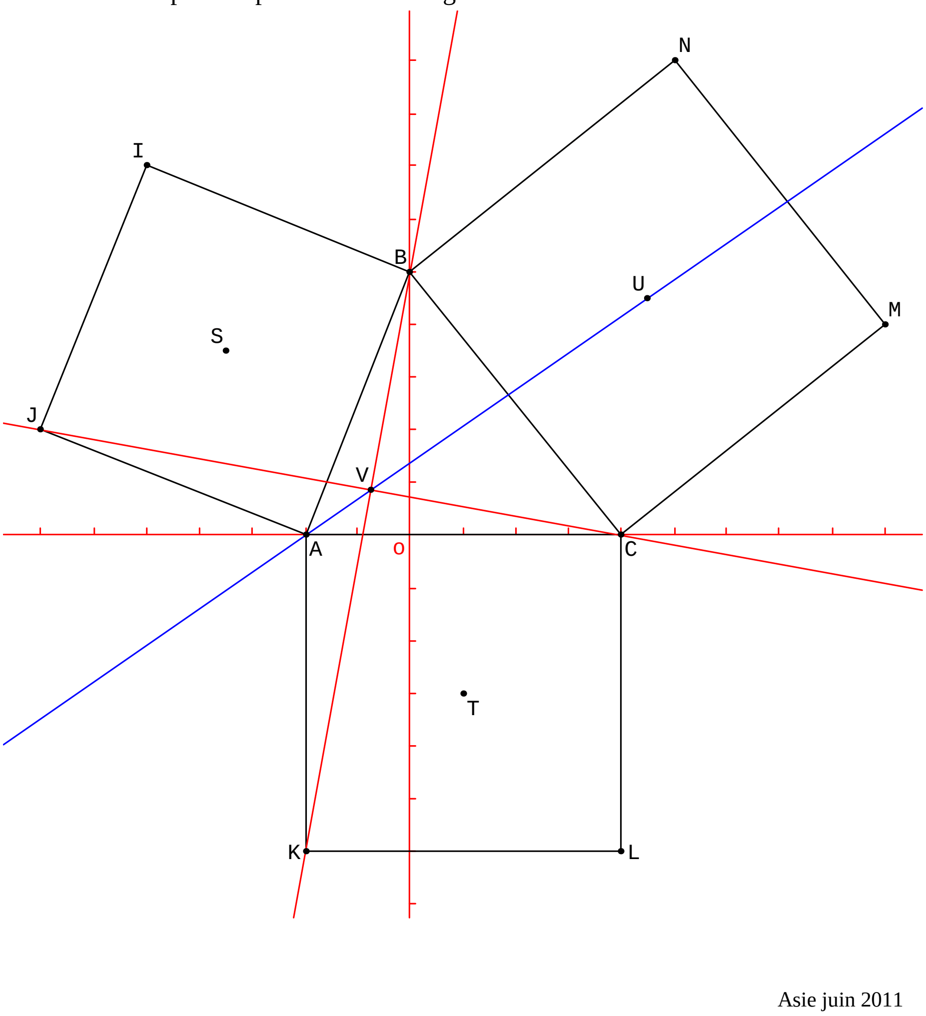
b. Les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et se coupent au point V donc l'angle $\widehat{BVC}$ est droit.

$(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

or V appartient à (JC) et les points A, V et U sont alignés.

$(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc $(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{VU}) = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ (on ne peut pas être plus précis sauf à prouver que V appartient à [JC] et à [AU]) donc la droite (AU) est une bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$.



EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

1. On se place dans le repère (D ; $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$).

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

A(1 ; 0 ; 0) B(1 ; 1 ; 0) C(0 ; 1 ; 0) D(0 ;0 ; 0) E(1 ;0 ; 1) F(1 ; 1 ; 1) C(0 ; 1 ; 1) H(0 ;0 ; 1)

a. $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées (1 ; – 1 ; 1) donc une représentation paramétrique de la droite (EC) est $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$..

b. Une équation cartésienne du plan (AFH) est de la forme $a\,x + b\,y + c\,z = d = 0$

Ce plan passe par A, F et H donc $\begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = d \\ c = -d \end{cases}$

Une équation cartésienne du plan (AFH) est $x - y + z - 1 = 0$

c. I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH) donc ses coordonnées vérifient $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ et $x - y + z - 1 = 0$

donc $t - 1 + t + t - 1 = 0$ donc $t = \dfrac{2}{3}$ et I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{IE}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3} ; -\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$, le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; – 1 ; 1) est normal au plan (AFH) et $3\,\overrightarrow{IE} = 2\,\vec{n}$ donc la droite (IE) est perpendiculaire en E au plan (AFH), I appartient à ce plan donc le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. la distance du point E au plan (AFH) est égale EI or $EI^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9}$ donc EI = $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

e. $\overrightarrow{HI}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; -\dfrac{1}{3}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1) donc $\overrightarrow{HI} . \overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{3} \times 0 + \dfrac{1}{3} \times 1 - \dfrac{1}{3} \times 1 = 0$,

donc la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

On montrerait de même que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (HF) donc I est le point d'intersection de deux hauteurs du triangle AFH, donc I est l'orthocentre du triangle AFH.

2. L'aire de la face AEF du tétraèdre EAFH est égale à $\dfrac{1}{2} \times AE \times EF = \dfrac{1}{2}$

Le volume du tétraèdre EAFH est égal à $\dfrac{1}{3} \times HE \times A_{AEF}$ soit $\dfrac{1}{3} \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

La hauteur issue de E du tétraèdre EAFH est égale à EI donc à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc le volume du tétraèdre EAFH est égal à $\dfrac{1}{3} \times EI \times A_{AFH}$ soit

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times A_{AFH} = \dfrac{1}{6}$ donc $A_{AFH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Le tétraèdre EAFH a deux faces AFH et AEF d'aires différentes donc il n'est pas de type 1 donc pas de type 3.

La droite (EH) est perpendiculaire au plan (AEF) donc est orthogonale à toute droite de ce plan donc l'arrête EH du tétraèdre est orthogonale à l'arrête AF.

La droite (EF) est perpendiculaire au plan (AEH) donc est orthogonale à toute droite de ce plan donc l'arrête EF du tétraèdre est orthogonale à l'arrête AH.

La droite (AE) est perpendiculaire au plan (EFH) donc est orthogonale à toute droite de ce plan donc l'arrête AF du tétraèdre est orthogonale à l'arrête FH.

Les arêtes opposées du tétraèdre EAFH sont orthogonales deux à deux donc le tétraèdre EAFH est de type 2.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$F(t) = p(X \leq t) = p([0\,;\,t]) = \displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc $p\,(X \geq t) = 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Restitution organisée de connaissances

Pour tout nombre réel positif s, on a : $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{p\,([\,t\,;+t+s\,]\cap[\,t\,;+\infty\,[)}{p\,([\,t\,;+\infty\,[)} = \dfrac{p\,([\,t\,;+t+s\,])}{p\,([\,t\,;+\infty\,[)}$

or $p(\,[t\,;\,t+s\,]\,) = F(t+s) - F(t)$ donc $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$,

$F(t+s) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}$ et $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc $F(t+s) - F(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}$ donc $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t} - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda s}$.

$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

2. La probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à :
$p([2\,;\,+\infty[) = \mathrm{e}^{-0,2\times 2} = \mathrm{e}^{-0,4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans est $p_{[2\,;\,+\infty[}([6\,;\,+\infty[) = \mathrm{e}^{-0,2\times 4} = \mathrm{e}^{-0,8} \approx 0,45$.

4. On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années ($p = \mathrm{e}^{-0,4}$)
- le capteur tombe en panne au cours des deux premières années ($q = 1 - \mathrm{e}^{-0,4}$)

donc la variable aléatoire qui compte le nombre de capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années suit une loi binomiale de paramètres $(10\,;\,\mathrm{e}^{-0,4})$.

a. $p(\mathrm{X} = 2) = \dbinom{10}{2} p^2 \times q^{10-2} = 0,002822$

b. $p(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0,4})^{10} \approx 0,999985$

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. n est un entier strictement supérieur à 1, donc $n \geq 2$

Soit (P_n) la propriété : Tout nombre entier k compris entre 2 et n est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers

2 est un nombre premier donc la propriété (P_2) est vraie.

Montrons que pour tout n si (P_n) est vraie alors (P_{n+1}) est vraie

si (P_n) est vraie alors pour tout entier k compris entre 2 et n, soit k est premier soit k peut se décomposer en produit de facteurs premiers

$n + 1$ est soit un nombre premier soit il admet au moins un diviseur premier.

si $n + 1$ est premier la propriété est vérifiée

si $n + 1$ n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier p donc il existe un entier q tel que $n + 1 = p\,q$

$p \geq 2$ donc $2 \leq q \leq \dfrac{n+1}{2}$ or $n \geq 2$ donc $\dfrac{n+1}{2} \leq n$ donc q est un entier compris entre 2 et n donc d'après l'hypothèse de récurrence, q se décompose en produit de facteurs premiers donc $n = p\,q$ se décompose en produit de facteurs premiers

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout nombre entier strictement supérieur à 1.

2. $629 = 17 \times 37$.

Partie B

1. La surface C est un cylindre d'axe (Oy) de rayon 1.

2. *a.* les coordonnées (x ; y ; z) des points d'intersection de Γ et de C vérifient : $\begin{cases} z = x\,y \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ donc : $x^2 + x^2 y^2 = 1$

soit : $x^2(1 + y^2) = 1$.

b. les coordonnées (x ; y ; z) des points d'intersection de Γ et de C vérifient : $x^2(1 + y^2) = 1$.

Si ces coordonnées sont des nombres entiers relatifs alors x^2 divise 1 donc $x = 1$ ou -1 et $1 + y^2 = 1$ soit $y = 0$, $z = x\,y$ donc dans les deux cas $z = 0$.

Il existe deux points d'intersection de Γ et de C : A (1 ; 0 ; 0) et B(– 1 ; 0 ; 0).

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 2$.

P_1 est le plan d'équation $z = 5$ donc les coordonnées les points d'intersection de Γ et du plan P_1 vérifient : $\begin{cases} z = 5 \\ z = x\,y \end{cases}$

Les coordonnées sont des nombres entiers relatifs alors x et y sont tels que $x\,y = 5$ donc x et y divisent 5, d'où les possibilités :

x	– 5	– 1	1	5
y	– 1	– 5	5	1

Les points d'intersection à coordonnées entières de Γ et du plan P_1 sont les points C (– 5 ; – 1 ; 5) D (– 1 ; – 5 ; 5) E (1 ; 5 ; 5) et F (5 ; 1 5).

b. $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = n^4 + 4$

c. Si le nombre entier naturel $n \geq 2$, alors $n - 1 \geq 1$ donc $(n - 1)^2 + 1 \geq 2$ donc $n^2 - 2n + 2 \geq 2$,

de même $n + 1 \geq 3$ donc $(n + 1)^2 + 1 \geq 10$ donc $n^2 + 2n + 2 \geq 10$,

$n^4 + 4$ admet deux diviseurs positifs $(n^2 - 2n + 2)$ et $(n^2 + 2n + 2)$, aucun d'eux ne peut être égal à 1 donc ne peut être égal à $n^4 + 4$ donc $n^4 + 4$ admet un diviseur autre que 1 et lui-même donc $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d. P_1 est le plan d'équation $z = 5$ donc les coordonnées les points d'intersection de Γ et du plan P_1 vérifient : $\begin{cases} z = n^4 + 4 \\ z = x\,y \end{cases}$.

donc $x\,y = n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$, donc x divise $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$

parmi ces diviseurs on a ;

x	-1	1	$-(n^4+4)$	n^4+4	$-(n^2-2n+2)$	(n^2-2n+2)	$-(n^2+2n+2)$	(n^2-2n+2)
y	$-(n^4+4)$	n^4+4	-1	1	$-(n^2+2n+2)$	(n^2-2n+2)	$-(n^2-2n+2)$	(n^2-2n+2)

On a donc au minimum 8 points donc le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. $5^4 + 4 = 629 = 17 \times 37$. Les diviseurs positifs de 629 sont 1 ; 17 ; 37 ; 629 donc

x	– 629	– 37	– 17	– 1	1	17	37	629
y	– 1	– 17	– 37	– 329	629	37	17	1

les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs sont les points de coordonnées :

(– 629 ; – 1 ; 629) ; (– 37 ; – 17 ; 629) ; (– 17 ; – 37 ; 629) ; (– 1 ; – 629 ; 629)

(629 ; 1 ; 629) ; (37 ; 17 ; 629) ; (17 ; 37 ; 629) ; (1 ; 629 ; 629)