Soit, pour tout entier n, la suite définie par $w_n = 3^{2n} - 2^n$.

1. Calculer w_0,w_1,w_2 et w_3. Montrer que w_1 divise les autres.

2. Par récurrence :

a. Montrer que $w_{n+1} = 9\,(w_n + 2^n) - 2 \times 2^n$

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel, w_n est divisible par 7 :

3. Par factorisation

a. Démontrer que pour tout couple $(a\,;b)$ de réel, $a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ... + a\,b^{n-1} + b^n)$

b. En déduire w_n est divisible par 7.

4. A partir des congruences

a. Montrer que pour tout n, $w_n \equiv 0$ modulo 7

b. Conclure.

CORRECTION

1. $w_0 = 3^{2\times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0$

$w_1 = 3^{2\times 1} - 2^1 = 9 - 2 = 7$

$w_2 = 3^{2\times 2} - 2^2 = 81 - 4 = 77$

$w_3 = 3^{2\times 3} - 2^3 = 729 - 8 = 721$

$w_0 = 0 \times w_1$; $w_2 = 11 \times w_1$; $w_3 = 103 \times w_1$ donc w_1 divise w_0, w_2 et w_3.

2. Par récurrence :

a. $w_{n+1} = 3^{2\,(n+1)} - 2^{(n+1)} = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$

$w_{n+1} = 3^2 \times 3^{2n} - 2 \times 2^2$ or $w_n = 3^{2n} - 2^n$ donc $3^{2n} = w_n + 2^n$ donc $w_{n+1} = 9\,(w_n + 2^n) - 2 \times 2^n$

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel, w_n est divisible par 7 :

Initialisation : w_0 est divisible par 7 donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : montrons que pour tout entier naturel n, si 7 divise w_n alors 7 divise w_{n+1}

$w_{n+1} = 9\,(w_n + 2^n) - 2 \times 2^n$

$w_{n+1} = 9\,w_n + 9 \times 2^n - 2 \times 2^n$

$w_{n+1} = 9\,w_n + 7 \times 2^n$

or 7 divise w_n et 7 divise 7×2^n donc 7 divise $9\,w_n + 7 \times 2^n$

donc 7 divise w_{n+1}.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, 7 divise w_n.

3. Par factorisation

a. Pour tout réel q, et tout entier naturel n : $q^n - 1 = (1 + q + \ldots + q^{n-1})\,(q - 1)$

Soit a et b deux réels, supposons $b \neq 0$ et posons $q = \dfrac{a}{b}$. En remplaçant dans la relation précédente, on obtient :

$$\left(1+\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}\right)\left(\frac{a}{b}-1\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^n-1$$

En multipliant par b^n on obtient : $b^{n-1}\left(1+\dfrac{a}{b}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-1}\right)\times b\left(\dfrac{a}{b}-1\right)=b^n\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n-1\right)$

soit $(b^{n-1} + a\,b^{n-2} + \ldots + a^{n-1})\,(a - b) = a^n - b^n$

Si $b = 0$, la propriété devient $a^{n-1} \times a = a^n$ donc est encore vérifiée

Pour tout couple $(a\,;b)$ de réels, $a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ... + a\,b^{n-1} + b^n)$

b. $w_n = 3^{2n} - 2^n$ avec n entier naturel donc $w_n = 9^n - 2^n$

$w_n = (9 - 2)\,(9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + ... + 9 \times 2^{n-1} + 2^n)$

$w_n = 7\,(9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + ... + 9 \times 2^{n-1} + 2^n)$ or $(9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + ... + 9 \times 2^{n-1} + 2^n)$ est un entier naturel donc 7 divise w_n.

4. A partir des congruences

a. $w_n = 3^{2n} - 2^n$ avec n entier naturel donc $w_n = 9^n - 2^n$

$9 \equiv 2$ modulo 7 donc $9^n \equiv 2^n$ modulo 7 donc pour tout n, $w_n \equiv 0$ modulo 7.

b. Pour tout n, $w_n \equiv 0$ modulo 7 donc pour tout n, 7 divise w_n.