On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2 *c*** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

CORRECTION

1. *a.* Si a existe tel que $a^2 + 9 = 2^n$, alors $a^2 = 2^n - 9$ or 2^n est pair donc a^2 est impair donc a est impair.

b. $2^2 \equiv 0$ (4) de plus $2^n = 2^{(n-2)} \times 2^2$ et $n \geq 4$, donc $n - 2 \geq 2$
donc $2^n \equiv 0$ (4)
$9 \equiv 1$ (4) donc $a^2 + 9 \equiv a^2 + 1$ (4)
a est impair donc de la forme $2k + 1$ donc $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$
donc $a^2 \equiv 1$ (4) donc $a^2 + 1$ n'est pas divisible par 4.
L'équation proposée n'a pas de solution.

2. *a.* $3^2 \equiv 1$ (4) donc si $n = 2k$ ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$) alors $3^n \equiv 1$ modulo 4

si $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$) alors $3^n \equiv 3$ modulo 4

b. Si a existe, $a^2 + 9 = 3^n$ donc $a^2 + 1 \equiv 3^n$ (4)
or a^2 est congru à 0 modulo 4 si a est pair
ou a^2 est congru à 1 modulo 4 si a est impair
Si a est pair alors $a^2 + 1 \equiv 1$ (4) donc $3^n \equiv 1$ (4) donc n est pair (question 2. a.).
Si a est impair alors $a^2 + 1 \equiv 2$ (4) donc $3^n \equiv 2$ (4) ce qui est impossible (question 2. a.).
Si a existe, il est pair et, nécessairement, n est pair.

c. $3^n - a^2 = 3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a) = 9$ donc $3^p + a$ divise 9,
donc $-9 \leq (3^p - a) \leq 9$
$p \geq 2$ donc $3^p + a \geq 9 + a \geq 10$
$3^p + a \geq 10$ et $-9 \leq (3^p - a) \leq 9$ donc l'équation n'admet pas de solution.

3. *a.* $a^2 + 9 = 5^n$ or $5 \equiv -1$ (3) et $9 \equiv 0$ (3) donc $a^2 + 9 \equiv a^2$ (3)
$5^n \equiv (-1)^n$ (3) donc, si n est impair $5^n \equiv -1$ (3) soit $5^n \equiv 2$ (3)

a est congru modulo 3 à	0	1	2
a^2 est congru modulo 3 à	0	1	1

donc pour tout entier a, a^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3 pour tout n impair
on n'a pas $a^2 \equiv 2$ (3) donc l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. $a^2 + 9 = 5^{2p} \Leftrightarrow a^2 - (5^p) = 9 \Leftrightarrow (a - 5^p)(a + 5^p) = 9$
$n \geq 2$ donc $p \geq 1$
$a + 5^p$ divise 9 donc $0 \leq a + 5^p \leq 9$ or $p \geq 1$ donc $a + 5^p \geq 5$
donc $5 \leq a + 5^p \leq 9$.
Le seul diviseur de 9 compris entre 5 et 9 est 9 donc $a + 5^p = 9$
$5 \leq 5^p \leq 9$ donc $p = 1$,
$a + 5 = 9$ donc $a = 4$.
Il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5 : $a = 4$.