Nouvelle-Calédonie novembre 2011

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans C l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i ; z_B = \overline{z_A} ; z_C = 2z_B ; z_D = 3.$$

Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.

4. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$. En déduire la nature du triangle DAC.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On note h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On note r la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle C' l'image de C par h et C" l'image de C' par r.

Montrer que les droites (AC) et (C'C") sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - x$.

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1{,}5$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$

On a représenté en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** la courbe C représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

a. Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

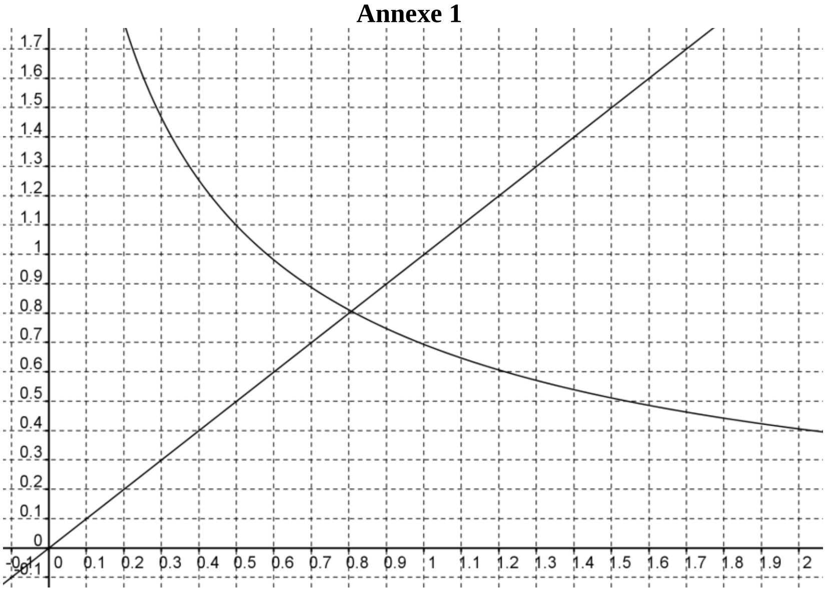
b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
Aucune justification n'est demandée.

- Conjecture $n°$ 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
- Conjecture $n°$ 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0,5. »
- Conjecture $n°$ 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

c. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite l strictement positive. Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{l}\right) = l$

d. Montrer que $l = \alpha$.

Annexe 1



EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t > 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda \, e^{-\lambda x} \, dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.

Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

a. Quelle est la loi suivie par Y ?

b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures

c. Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. *a.* Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.

b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

2. *a.* Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC?

3. *a.* Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.

Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'. Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{9}\right)$.

Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Retrouver alors la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface S d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

1. ***a.*** Montrer que si le point $M(x ; y ; z)$ appartient à S alors le point $M'(-x ; -y ; -z)$ appartient aussi à S.

Que peut-on en déduire ?

b. Montrer que la surface S est symétrique par rapport au plan (xOy). On admet de même que la surface S est symétrique par rapport aux plans (xOz) et (yOz).

2. ***a.*** Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan (xOy). Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Soit k un réel non nul.

Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan d'équation $z = k$. Préciser ses éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$.

4. On considère les points A $(2\sqrt{2} ; 0 ; 2)$ et B $(0 ; 2\sqrt{2} ; -2)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. La droite (AB) est-elle contenue dans la surface S ?

5. Identifier parmi les trois figures proposées en **annexe 2** celle qui représente la surface S.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la figure et justifiera la réponse.

6. Soit H la section de la surface S par le plan P d'équation $y = 5$.

a. Montrer qu'un point $M(x ; y ; z)$ appartient à H si et seulement si $(x - z)(x + z) = -21$ et $y = 5$.

b. En déduire les coordonnées des points de H dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

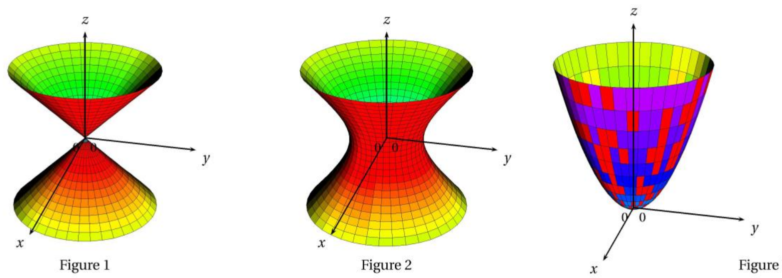


Figure 1 Figure 2 Figure 3

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

$\left(\dfrac{z}{z'}\right) \times z' = z$ donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg(z)$ à 2π près

soit $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

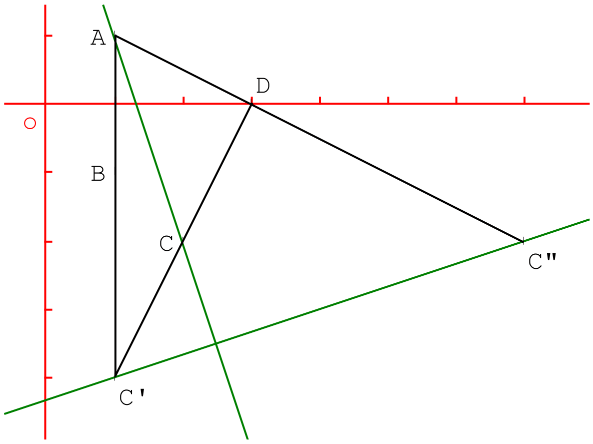
La propriété « pour tout z non nul, $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ » ne figure pas dans les pré-requis. Avant de l'utiliser, il faut la prouver.

Partie B

1. $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -1$

$\Leftrightarrow z - 1 = \text{i}$ ou $z - 1 = -\text{i} \Leftrightarrow z = 1 - \text{i}$ ou $z = 1 + \text{i}$

2.



3. $\text{DA} = |1 + \text{i} - 3| = |-2 + \text{i}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\text{DB} = |1 - \text{i} - 3| = |-2 - \text{i}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\text{DC} = |2 - 2\text{i} - 3| = |-1 - 2\text{i}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

donc DA = DB = DC = $\sqrt{5}$ donc les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D de rayon $\sqrt{5}$.

4. $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3} = \dfrac{2 - 2\text{i} - 3}{1 + \text{i} - 3} = \dfrac{-1 - 2\text{i}}{-2 + \text{i}} = \text{i}$,

donc $\left|\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}\right| = 1$ et $\arg\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3} = \arg \text{i} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donc $\dfrac{\text{DC}}{\text{DA}} = 1$ et $(\overrightarrow{\text{DA}}\,;\overrightarrow{\text{DC}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Le triangle DAC est rectangle isocèle en D.

5. L'homothétie h de centre D et de rapport 2 a pour écriture complexe :

$z' - 3 = 2(z - 3)$ donc si c' est l'affixe de C' :

$c' - 3 = 2(2 - 2\text{i} - 3) \Leftrightarrow c' = 2(-1 - 2\text{i}) + 3 \Leftrightarrow c' = 1 - 4\text{i}$

La rotation r de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe :

$z' - 3 = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z - 3)$ soit $z' - 3 = \text{i}(z - 3)$

si c'' est l'affixe de C" : $c'' - 3 = \text{i}(c' - 3) \Leftrightarrow c'' - 3 = \text{i}(1 - 4\text{i} - 3)$

$\Leftrightarrow c'' - 3 = \text{i}(-2 - 4\text{i}) \Leftrightarrow c'' = -2\text{i} + 4 + 3 \Leftrightarrow c'' = 7 - 2\text{i}$

$\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $c - a = 1 - 3\text{ i}$ donc a pour coordonnées (1 ; – 3) ;
$\overrightarrow{C'C''}$ a pour affixe $c'' - c' = 7 - 2\text{ i} - 1 + 4\text{ i} = 6 + 2\text{ i}$ donc a pour coordonnées (6 ; 2)
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{C'C''} = 1 \times 6 + (-3) \times 2 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{C'C''}$ sont orthogonaux, les droites (AC) et (C'C") sont perpendiculaires.

Non demandé :
C' = h(C) donc les point C, D, C' sont alignés, le triangle DAC étant rectangle en D, (CC') est perpendiculaire à (AD)
C" = r(C) donc les droites (CD) et (C" D) sont perpendiculaires donc le triangle DAC étant rectangle en D, (CD) est perpendiculaire à (AD) donc les droites (AD) et (C" D) sont parallèles, elles ont un point commun D donc sont confondues les points A, D, C" sont alignés donc (AC") est perpendiculaire à (CC') donc (CC') est la hauteur issue de C' du triangle A C ' C ".
C est le point d'intersection de deux hauteurs (CC') et (AC) du triangle A C' C" donc est l'orthocentre de ce triangle.

EXERCICE 2 5 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b. La dérivée de ln u est $\dfrac{u'}{u}$ ici $u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

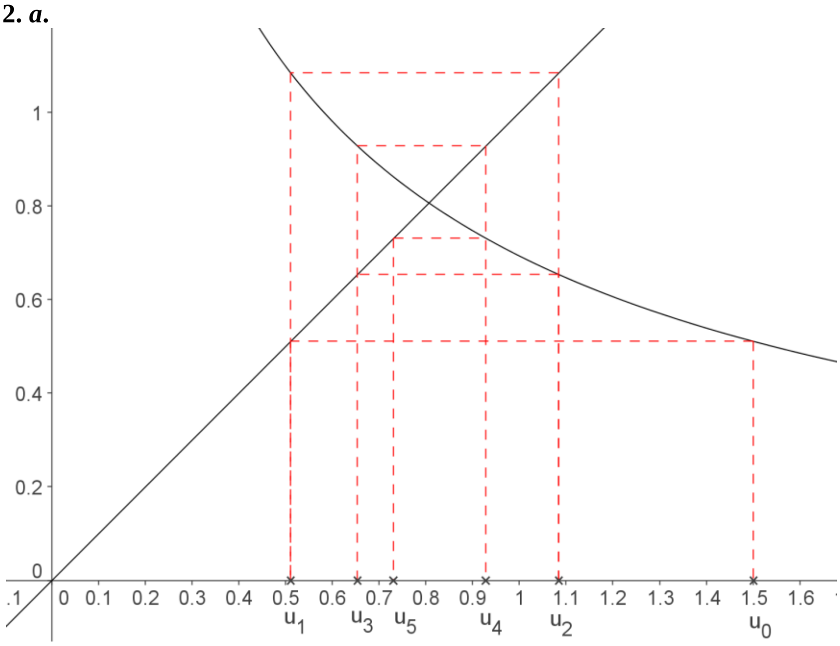
$f'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)} - 1$; $x > 0$ donc $\dfrac{-1}{x(x+1)} < 0$ or $-1 < 0$ donc la somme de deux nombres strictement négatif étant un nombre strictement négatif, $f'(x) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. La fonction f est définie continue strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $f(]\,0\,;+\infty\,[) =]\,-\infty\,;+\infty\,[$; $0 \in\,]\,-\infty\,;+\infty\,[$; donc il existe un unique réel α appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

x	0	0,806	α	0,807	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(0{,}806)$	0	$f(0{,}807)$	$-\infty$

$f(0{,}806) \approx 0{,}0008$ et $f(0{,}807) \approx -0{,}0009$ donc $0{,}806 < \alpha < 0{,}807$

2. *a.*



b. Conjecture $n°$ 1 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. » FAUX $u_1 < u_0$ et $u_1 < u_2$.

Conjecture $n°$ 2 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0,5. » VRAI sur les premiers termes : $0{,}5 \leq u_n$

Conjecture $n°$ 3 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. » FAUX sur les premiers termes, (u_n) converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe de g et de la droite $y = x$ et cette abscisse est voisine de 0,8.

c. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite l strictement positive, $u_{n+1} = g(u_n)$ et la fonction g est continue sur $]0 ; +\infty[$ donc la limite l de la suite (u_n) est solution de l'équation $g(x) = x$

donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{l}\right) = l$.

d. Sur $]0 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = x$ est équivalente à $f(x) = 0$ or cette équation admet une unique solution α donc $l = \alpha$.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Pour tout réel $t > 0$, $P(X \leq t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda t}$

$P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t) = e^{-\lambda t}$

1. La probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6 donc $1 - e^{-7\lambda} = 0{,}6$

$e^{-7\lambda} = 0{,}4 \Leftrightarrow -7\lambda = \ln 0{,}4 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-\ln 0{,}4}{7}$ donc une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

2. la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $e^{-5\lambda} = e^{-0{,}655}$ donc 0,52 à 10^{-2} près.

3. X suit une loi à durée de vie sans vieillissement donc le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des 4 premières heures a la même probabilité que l'événement : « il n'y a pas eu de panne au cours des 5 premières heures »

donc $P_{(X \geq 4)}(X \geq 9) = P(X \geq 5) = 0{,}52$.

4. $P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 6)$

$P(6 \leq X \leq 10) = 1 - e^{-10 \times 0{,}131} - (1 - e^{-6 \times 0{,}131}) = e^{-6 \times 0{,}131} - e^{-10 \times 0{,}131}$

$P(6 \leq X \leq 10) = 0{,}19$

5. *a.* On a une succession de 8 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles *a* deux issues :

- réussite : le temps de fonctionnement est supérieur ou égal à 5 heures ($p = 0{,}52$)
- échec : le temps de fonctionnement est inférieur ou égal à 5 heures ($q = 1 - p = 0{,}48$)

donc la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures suit une loi binomiale de paramètres (8 ; 0,52).

b. La probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures est $p(\text{Y} = 3) = \dbinom{8}{3} \times 0{,}52^3 \times 0{,}48^5 \approx 0{,}20$

c. L'espérance mathématique de Y est égale à $n\,p$ donc $8 \times 0{,}52 = 4{,}16$ donc 4 arrondi à l'entier le plus proche.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (0 ; 4 ; – 2) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (2 ; 0 ; – 2), ces vecteurs sont non colinéaires donc forment un plan.
Soit le plan Q d'équation 2 *x* + *y* + 2 *z* = 4,
$2 \times 0 + 0 + 2 \times 2 = 4$ donc A $\in$ Q
$2 \times 0 + 4 + 2 \times 0 = 4$ donc B $\in$ Q
$2 \times 2 + 0 + 2 \times 0 = 4$ donc C $\in$ Q donc (ABC) = Q
Une équation du plan (ABC) est : 2 *x* + *y* + 2 *z* = 4

b. $d = \dfrac{|2 \times 0 + 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{3}$.

2. *a.* $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (2 ; – 4 ; 0) donc *P* est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC} = 0$ soit 2 *x* – 4 *y* = 0
Une équation du plan *P* passant par A et orthogonal à la droite (BC) est :

$$x - 2y = 0.$$

b. Tout point M de Δ droite intersection du plan *P* et du plan (ABC) a des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2 \times 2y + y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2 - \dfrac{5}{2}y \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$.

A $\in$ *P* et A $\in$ (ABC) donc le point A appartient à Δ, de plus le plan *P* passant par A et orthogonal à la droite (BC) donc Δ étant une droite de *P* est orthogonale à (BC)
Δ est donc la droite passant par A et perpendiculaire à (BC) donc est la hauteur issue de A du triangle ABC.

3. *a.* Le milieu I de [AC] est le point de coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_C}{2} ; \dfrac{y_A + y_C}{2} ; \dfrac{z_A + z_C}{2} \right)$ soit (1 ; 0 ; 1). Δ' la médiane issue de B du triangle ABC est la droite passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{BI}$ de coordonnées (1 ; – 4 ; 1), c'est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BI}$ donc une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

b. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (0 ; 4 ; – 2) donc $AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$
$\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (2 ; – 4 ; 0), donc $BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$
AB = BC donc le triangle ABC est un triangle isocèle en B.

4. H $\in$ Δ et H $\in$ Δ' donc ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-2(4-4t)=0 \\ 2t+4-4t+2t=4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases} \text{ et } 9t-8=0$$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{8}{9}$ et $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow$ le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{8}{9} ; \dfrac{4}{9} ; \dfrac{8}{9} \right)$.

H appartient à Δ' médiane issue de B du triangle ABC or ce triangle est isocèle en B donc H appartient à la hauteur issue de B du triangle ABC.
H appartient à Δ hauteur issue de A du triangle ABC donc H est le point d'intersection de deux hauteurs du triangle ABC donc est l'orthocentre de ce triangle.

5. $\overrightarrow{OH} . \overrightarrow{AB} = \dfrac{8}{9} \times 0 + \dfrac{4}{9} \times 4 + \dfrac{8}{9} \times (-2) = 0$ donc (OH) est perpendiculaire à (AB)
$\overrightarrow{OH} . \overrightarrow{BC} = \dfrac{8}{9} \times 2 + \dfrac{4}{9} \times (-4) + \dfrac{8}{9} \times 0 = 0$ donc (OH) est perpendiculaire à (BC)
(OH) est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (BC) du plan (ABC) donc est orthogonale à ce plan. H est un point du plan (ABC) donc le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

La distance du point O au plan (ABC) est OH
or $OH^2 = \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 = \dfrac{144}{9^2} = \dfrac{16}{9}$ donc $OH = \dfrac{4}{3}$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. *a.* Si le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S alors $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
donc $(-x)^2 + (-y)^2 - (-z)^2 = 4$ donc le point $M'(-x\ ;\ -y\ ;\ -z)$ appartient aussi à S.
M et M' sont symétriques par rapport à O donc la surface S est symétrique par rapport à O.

b. Si le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S alors $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
donc $x^2 + y^2 - (-z)^2 = 4$ donc le point $M'(x\ ;\ y\ ;\ -z)$ appartient aussi à S.
M et M' sont symétriques par rapport au plan (xOy) donc la surface S est symétrique par rapport à au plan (xOy).

2. *a.* Soit M un point appartenant à la section de la surface S par le plan (xOy) alors $z = 0$ et $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.
donc tout point M appartenant à la section de la surface S par le plan (xOy) a des coordonnées qui vérifient : $x^2 + y^2 = 4$ et $z = 0 \Leftrightarrow \text{OM}^2 = 4$ et $z = 0$
$\Leftrightarrow \text{OM} = 2$ et $z = 0$.
La section de la surface S par le plan (xOy) est donc le cercle de centre O de rayon 2 du plan (xOy) .

b. $\text{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \text{S} \cap \text{P}_k \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4 \\ z = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 + 4 \\ z = k \end{cases}$

M *a* des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ k)$ donc $x^2 + y^2 = k^2 + 4$
$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (k-k)^2 = 4 + k^2$
Soit $\Omega_k(0\ ;\ 0\ ;\ k)$ alors $\Omega_k\text{M}^2 = 4 + k^2$ donc $\Omega_k\text{M} = \sqrt{4+k^2}$.
La section de la surface S par le plan d'équation $z = k$ est le cercle de ce plan de centre Ω_k de rayon $\sqrt{4+k^2}$.

3. M appartient à la surface S et au plan d'équation $y = 2$ donc a des coordonnées $(x\ ;\ 2\ ;\ z)$ qui vérifient $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2^2 - z^2 = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -z \\ y = 2 \end{cases}$

La section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ est la réunion de droites de ce plan d'équation respective $x = z$ et $x = -z$.

4. *a.* $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(-2\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}\ ;\ -4)$ donc est colinéaire à $\vec{u}\,(1\ ;\ -1\ ;\ \sqrt{2})$.

La droite (AB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} + t \\ y = -t \\ z = 2 + \sqrt{2}\,t \end{cases}$

b. Soit M un point quelconque de (AB)
Il existe un réel t tel que M a pour coordonnées $(2\sqrt{2} + t\ ;\ -t\ ;\ 2 + \sqrt{2}\,t)$.
$x^2 + y^2 - z^2 = (2\sqrt{2} + t)^2 + (-t)^2 - (2 + \sqrt{2}\,t)^2$
$x^2 + y^2 - z^2 = 8 + 4\sqrt{2}\,t + t^2 + t^2 - (4 + 4\sqrt{2}\,t + 2t^2) = 4$
La droite (AB) est contenue dans la surface S.

5. la surface S est symétrique par rapport à O donc la figure 3 ne convient pas.
La section de la surface S par le plan (xOy) est donc le cercle de centre O de rayon 2 du plan (xOy) donc la figure 1 ne convient pas. (le cercle est ici réduit à un point)
La seule figure possible est la 2 : hyperboloïde de révolution.

6. Soit H la section de la surface S par le plan P d'équation $y = 5$.

a. M appartient à la surface S et au plan d'équation $y = 5$ donc a des coordonnées $(x ; 5 ; z)$ qui vérifient $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5^2 - z^2 = 4 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - z^2 = -21 \\ y = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x - z)(x + z) = -21$ et $y = 5$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à H si et seulement si $(x - z)(x + z) = -21$ et $y = 5$.

b. x et z sont des entiers relatifs donc $x - z$ et $x + z$ également,

$x + z$ divise 21 donc $x + z \in \{-21 ; -7 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 7 ; 21\}$

en remarquant que $2x = (x + z) + (x - z)$ et que $2z = (x + z) - (x - z)$

$x + z$	-21	-7	-3	-1	1	3	7	21
$x - z$	-1	-3	-7	-21	21	7	3	1
$2x$	-22	-10	-10	-22	22	10	10	22
$2z$	-20	-4	4	20	-20	-4	4	20
x	-11	-5	-5	-11	11	5	5	11
z	-10	-2	2	10	-10	-2	2	10

Les coordonnées des points sont $(-11 ; 5 ; -10)$ $(11 ; 5 ; -10)$ $(11 ; 5 ; 10)$ $(-11 ; 5 ; 10)$ $(-5 ; 5 ; -2)$ $(-5 ; 5 ; 2)$ $(5 ; 5 ; -2)$ $(5 ; 5 ; 2)$.