On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. *a*. Calculer u_1 et u_2.
b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
a Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

1. *a*. $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \dfrac{9}{10}$

b. Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

$u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $u_0 > 0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de N, si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$

$u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ or $u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$ (somme et quotient de termes positifs).

La propriété est héréditaire donc pour tout entier n, $u_n > 0$.

2. *a* $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = u_n\left(\dfrac{3}{1+2u_n} - 1\right) = u_n \times \dfrac{2(1-u_n)}{1+2u_n}$

$u_n > 0$ donc $\dfrac{u_n}{1+2u_n} > 0$ et $u_n < 1$ donc $2(1-u_n) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est croissante, majorée par 1 donc la suite (u_n) converge.

3. *a*. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$

$1 - u_{n+1} = 1 - \dfrac{3u_n}{1+2u_n} = \dfrac{1-u_n}{1+2u_n}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \times \dfrac{1+2u_n}{1-u_n} = 3\dfrac{u_n}{1-u_n}$

$v_{n+1} = 3v_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = 1$ donc pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n, $v_n = 3^n v_0 = 3^n$.

c. $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n \Leftrightarrow u_n(1+v_n) = v_n \Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$, (pour tout entier naturel n, $v_n > 0$ donc $1 + v_n \neq 0$) or

$v_n = 3^n$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

$u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1} = 1 - \dfrac{1}{3^n+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$