On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^{x}$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.
Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

1. *a.* Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.
b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.
c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)e^{x} + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur ℝ par : $\varphi(x) = 2(x-1)e^{x} + 1$

1. *a.* Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur ℝ. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

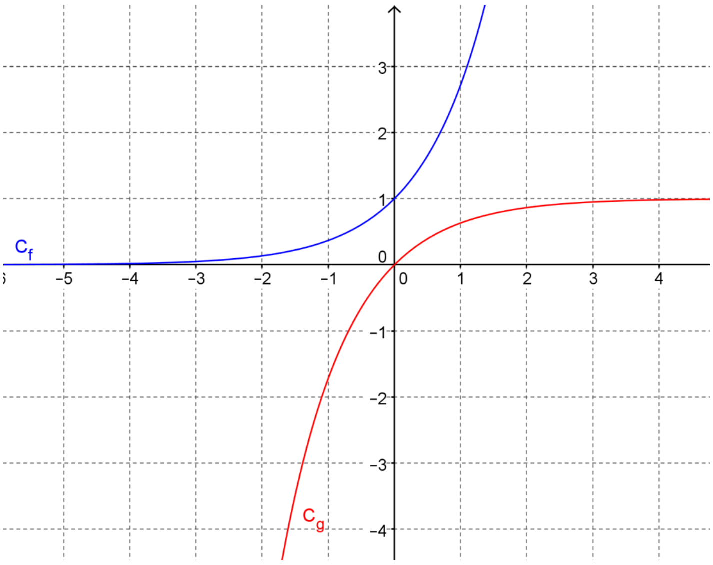
2. *a.* Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans ℝ.
b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe C_f d'abscisse α et F le point de la courbe C_g d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).
1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe C_f au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à C_g au point F.

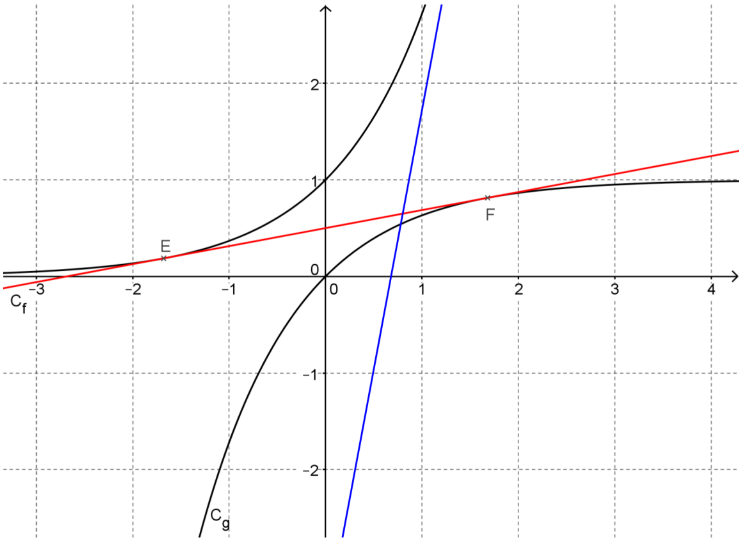
Annexe
à rendre avec la copie

Exercice 2



CORRECTION

Partie A



Partie B

1. *a.* $f'(x) = e^x$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A est e^a

b. $g'(x) = e^{-x}$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B est e^{-b}

c. Les deux tangentes sont confondues donc leurs coefficients directeurs sont égaux donc $e^a = e^{-b}$ donc $a = -b$ soit $b = -a$.

2. Une équation de la tangente en A à C_f est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit $y = e^a(x - a) + e^a$.
Cette droite passe par B de coordonnées $(b ; g(b))$
$b = -a$ donc B a pour coordonnées $(-a ; 1 - e^a)$
donc $1 - e^a = e^a(-a - a) + e^a$ soit $1 - e^a = -2\,a\,e^a + e^a$.
soit $1 + 2\,a\,e^a - 2\,e^a = 0$
Le réel a est solution de l'équation : $2(x - 1)\,e^x + 1 = 0$.

Partie C

1. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

$\varphi(x) = 2\,x\,e^x - 2\,e^x + 1$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1$

b. $\begin{cases} u(x) = 2(x-1) & u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{cases}$ donc $\varphi'(x) = 2\,e^x + 2(x - 1)\,e^x = 2\,x\,e^x$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ a le même signe que x.

c. $\varphi(0) = -2\,e^0 + 1 = -1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	1 ↘	-1	↗ $+\infty$

2. *a.* Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, la fonction φ est continue et strictement décroissante, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1$ et $\varphi(0) = -1$, $0 \in [-1 ; 1[$ donc, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution α sur $]-\infty ; 0]$
Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction φ est continue et strictement croissante, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(0) = -1$, $0 \in [-1 ; +\infty[$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique β solution sur $]0 ; +\infty[$.
L'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. $\varphi(-1{,}68) > 0$ et $\varphi(-1{,}67) > 0$ donc $-1{,}68 < \alpha < -1{,}67$ de même $\varphi(0{,}76) < 0$ et $\varphi(0{,}77) > 0$ donc $0{,}76 < \beta < 0{,}77$

Partie D

1. La tangente en E à la courbe C_f a pour équation $y = e^\alpha(x - \alpha) + e^\alpha$, cette droite passe par E par définition de la tangente.
F est le point de coordonnées $(-\alpha ; 1 - e^\alpha)$
Si $x = -\alpha$ et $y = 1 - e^\alpha$, alors $y_F - [e^\alpha(x_F - \alpha) + e^\alpha] = (1 - e^\alpha) - [e^\alpha(-\alpha - \alpha) + e^\alpha] = 2\,\alpha\,e^\alpha - 2\,e^\alpha + 1 = 2(\alpha - 1)\,e^\alpha + 1$
or α est solution de $\varphi(x) = 0$ donc $2(\alpha - 1)\,e^x + 1 = 0$ donc $y_F - [e^\alpha(x_F - \alpha) + e^\alpha] = 0$ soit $y_F = e^\alpha(x_F - \alpha) + e^\alpha$
F appartient à la tangente en E à la courbe C_f.
La droite (EF) est confondue avec la tangente à la courbe C_f au point E.

2. La tangente en F à la courbe C_g a pour équation $y = e^\alpha(x + \alpha) + 1 - e^\alpha$, cette droite passe par F par définition de la tangente.
E est le point de coordonnées $(\alpha ; e^\alpha)$
Si $x = \alpha$ et $y = e^\alpha$, alors $y_E - [e^\alpha(x_E + \alpha) + 1 - e^\alpha] = e^\alpha - [e^\alpha(\alpha + \alpha) + 1 - e^\alpha] = -2\,\alpha\,e^\alpha + 2\,e^\alpha - 1 = -[2(\alpha - 1)\,e^\alpha + 1]$
or α est solution de $\varphi(x) = 0$ donc $2(\alpha - 1)\,e^x + 1 = 0$ donc $y_E - [e^\alpha(x_E + \alpha) + 1 - e^\alpha] = 0$ soit $y_E = [e^\alpha(x_E + \alpha) + 1 - e^\alpha$
E appartient à la tangente en F à la courbe C_g.
La droite (EF) est confondue avec la tangente à la courbe C_g au point F. La droite (EF) est tangente commune à C_f et à C_g..