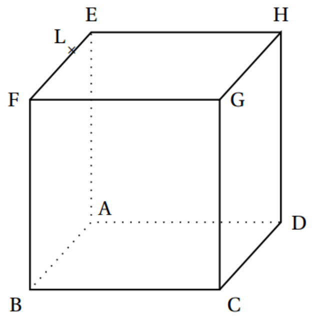
Polynésie juin 2016

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3\,i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4\,i$ ne sont pas alignés.

2. **Proposition 2 :**
Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i\,(1+i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 :
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.
Proposition 4 :
Le triangle DBL est rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

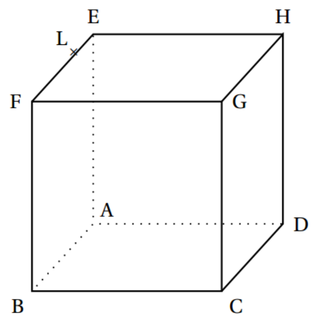
Proposition 5 :
L'intégrale $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 1,5 et 6.

CORRECTION

1. **Proposition 1 : VRAIE**
$\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $\sqrt{2} + 7\,i$, et $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $1 + 5\,i$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont pour coordonnées ($\sqrt{2}$; 7) et (1 ; 5)
$\sqrt{2} \times 5 - 7 \times 1 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **Proposition 2 : FAUSSE**
$[i\,(1+i)]^2 = i^2 \times (1+i)^2 = -2\,i$ donc $\left([i\,(1+i)]^2\right)^4 = (-2\,i) = 2^4 = 16$, si $n = 4$ alors $[i\,(1+i)]^{2n}$ est un réel strictement positif.

3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 : FAUSSE
Le plan (BDL) coupe le plan (ABC) suivant la droite (BD) donc il coupe le plan (EFG) suivant une droite parallèle passant par L
La section du cube par le plan (BDL) est un trapèze.

Proposition 4 : FAUSSE

$\overrightarrow{EL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ donc dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};0;1\right)$ donc $\overrightarrow{BL}\left(\frac{1}{3}-1;0;1\right)$ soit $\left(-\frac{2}{3};0;1\right)$

$\overrightarrow{BD}(-1;1;0)$ donc $\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}\times(-1)+1\times0+0\times1=\frac{2}{3}$

les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux donc le triangle DBL n'est pas rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5 : FAUSSE

En choisissant B (2,000 001 ; 0,000 001), D(3,000 001 ; 0,000 001) F(4,999 999 ; 1,000 001) la ligne brisée ABCDEFG vérifie l'hypothèse et $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est approximativement l'aire de EE'G'G donc est voisine de 1 donc n'est pas comprise entre 1,5 et 6.