Nouvelle-Calédonie & Wallis et Futuna novembre 2017

Exercice 3 (3 points) Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = 2\,e^{x} - e^{2x}$ et C sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

On admet que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,\ln(2)]$, $f(x)$ est positif.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition A :

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe C est égale à 1 unité d'aire.

Partie B

Soit n un entier strictement positif.

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par $f_n(x) = 2\,n\,e^{x} - e^{2x}$ et C_n sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

On admet que f_n est dérivable et que C_n admet une tangente horizontale en un unique point S_n.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition B : Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

CORRECTION

Partie A

Proposition a : FAUSSE

Pour tout x appartenant à $[0\,;\,\ln(2)]$, $f(x)$ est positif donc l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe C est égale $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \left[\,2\,e^{x} - \frac{1}{2}\,e^{2x}\,\right]_0^{\ln 2} = 2\,e^{\ln 2} - \frac{1}{2}\,e^{2\ln 2} - \left(2\,e^{0} - \frac{1}{2}\,e^{0}\right) = 4 - 2 - (2 - 0{,}5) = 0{,}5.$

Partie B

Proposition B : VRAIE

$f'_n(x) = 2\,n\,e^{x} - 2\,e^{2x} = 2\,e^{x}(n - e^{x})$ donc $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = n \Leftrightarrow x = \ln n$

L'abscisse de S_n est $\ln(n)$, l'ordonnée de S_n est $f_n(\ln n) = 2\,n \times n - n^2 = n^2$

Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.