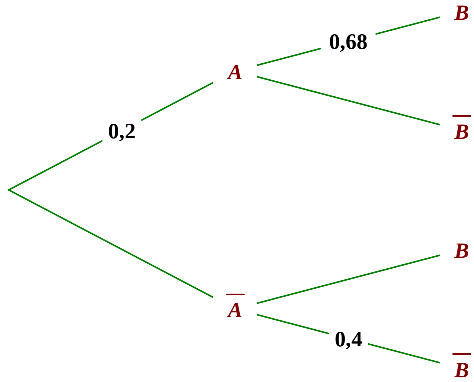
Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



Affirmation : la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à 0,32.

2. On considère une urne contenant n boules rouges et trois boules noires, où n désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard deux boules dans l'urne.

Affirmation : il existe une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\frac{9}{22}$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation t d'écriture complexe :

$$z' = -\mathrm{i}\,z + 5 + \mathrm{i}.$$

Affirmation : la transformation t est la rotation de centre A d'affixe $3 - 2\,\mathrm{i}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

4. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - z\,\overline{z} - 1 = 0$.
Affirmation : l'équation (E) admet au moins une solution.

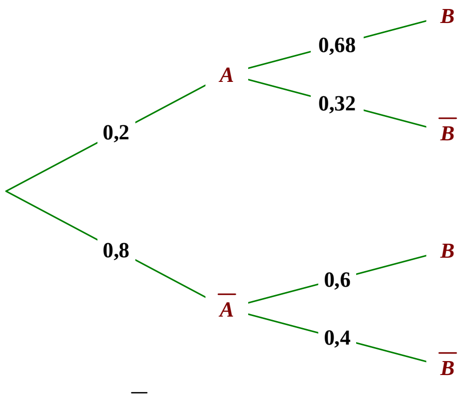
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -1,\ b = \mathrm{i} \text{ et } c = \sqrt{3} + \mathrm{i}\,(1 - \sqrt{3}).$$

Affirmation : le triangle ABC possède un angle dont une mesure est égale à 60 °.

CORRECTION

1. Affirmation : FAUSSE



$p(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}68 = 0{,}136$ et $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

$p(B) = 0{,}2 \times 0{,}68 + 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}616$ donc $p_B(A) = \dfrac{0{,}136}{0{,}616} \approx 0{,}22$.

2. Affirmation : VRAIE

Le nombre de cas possibles est $\binom{n+3}{2} = \dfrac{(n+3)!}{2!\,(n+1)!}$.

$$\binom{n+3}{2} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times n\,(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times \ldots \times n\,(n+1)}$$

$$\binom{n+3}{2} = \frac{(n+2) \times (n+3)}{2}$$

Le nombre de cas favorables est $\binom{n}{1} \times \binom{3}{1} = 3\,n$ (choisir une boule parmi les n boules rouges et 1 parmi les 3 boules noires donc la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{3\,n}{\dfrac{(n+2)(n+3)}{2}} = \dfrac{6\,n}{(n+2)(n+3)}$

Il faut donc chercher n tel que $\dfrac{6\,n}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{9}{22}$

soit $22 \times 6\,n = 9\,(n+2)\,(n+3)$
donc $3\,n^2 + 15\,n + 18 = 44\,n$
soit $3\,n^2 - 29\,n + 18 = 0$

Les solutions de $3\,x^2 - 29\,x + 18 = 0$ sont $x = 9$ et $x = \dfrac{2}{3}$, donc il existe une valeur de n ($n = 9$) pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$.

3. Affirmation : VRAIE

La rotation de centre A d'affixe 3 – 2 i et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$, a pour écriture complexe $z' - z_A = e^{i\frac{-\pi}{2}}\,(z - z_A)$

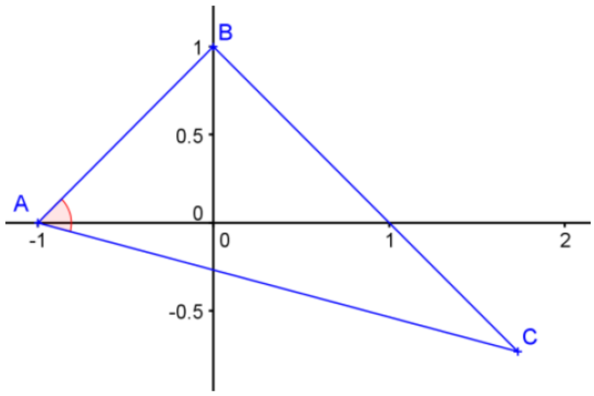
$e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i$ donc $z' = -i\,z + i\,z_A + z_A$ soit $z' = -i\,z + 3\,i + 2 + 3 - 2\,i$
donc $z' = -i\,z + 5 + i$

La transformation t d'écriture complexe : $z' = -i\,z + 5 + i$ est la rotation de centre A d'affixe 3 – 2 i et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. Affirmation : FAUSSE

$z^2 - z\,\overline{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z\,(z - \overline{z}\,) = 1$
En posant $z = x + i\,y$ (x et y réels) alors $(x + i\,y)\,(2\,i\,y) = 1$
$\Leftrightarrow -2\,y^2 + 2\,i\,x\,y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\,y^2 = 1 \\ 2\,x\,y = 0 \end{cases}$ avec x et y réels
or pour tout y réel, $-2\,y^2 < 0$ donc $-2\,y^2 \neq 1$ donc l'équation (E) n'admet pas de solution.

5. Affirmation : VRAIE



Evaluons l'angle $\widehat{CAB}$.
$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées ($\sqrt{3} + 1$; $1 - \sqrt{3}$)
donc $AC^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 + (1 - \sqrt{3}\,)^2$
$AC^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 8$ donc $AC = 2\sqrt{2}$.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (1 ; 1) donc $AB^2 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1\,(\sqrt{3} + 1) + 1\,(1 - \sqrt{3}\,) = 2 = AB \times AC \cos \widehat{CAB}$
donc $2 = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \cos \widehat{CAB}$ donc $\cos \widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}$, donc une mesure de l'angle CAB est égale à 60°.