Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.
On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :
— 20% des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
— 10% des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.
On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. En déduire que $U_{n+1} = M\,U_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n\,U_0$.

d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$M^n = P\,D^n\,P^{-1}.$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$.

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

CORRECTION

1. *a.* $a_1 = 0{,}8 \times a_0 + 0{,}1\,b_0 = 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}5 = 0{,}45$

$a_1 + b_1 = 1$ donc $b_1 = 0{,}55$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

b. $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 0{,}1\,b_n$
$b_{n+1} = 0{,}2 \times a_n + 0{,}9\,b_n$

c. Soit $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ alors $U_{n+1} = M\,U_n$

d. Au bout de 3 jours on a $\mathrm{U}_3 = \mathrm{M}^3\,\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{pmatrix}$.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,I_2$

$\dfrac{1}{3}P \times P = I_2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b. $P^{-1}MP = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}MP = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}4 & -0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2{,}1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

c. **Initialisation :**
$P^{-1} M P = D$ donc $P \times P^{-1} M P \times P^{-1} = P \times D \times P^{-1}$ donc $M = P \times D^1 \times P^{-1}$, La propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité :
Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n entier naturel non nul, si $M^n = P D^n P^{-1}$ alors $M^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$
$M^{n+1} = M^n \times M$ donc $M^{n+1} = M^n \times M$
$M^{n+1} = P D^n P^{-1} \times P D P^{-1}$ or $P^{-1} \times P = I_2$
donc $M^{n+1} = P D^n \times I_2 \times D P^{-1}$
$M^{n+1} = P D^n \times D P^{-1}$ donc $M^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel non nul, $M^n = P D^n P^{-1}$

3. $U_n = M^n U_0$

$$U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{1-0,7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \times 0,5\,(1 + 2 \times 0,7^n) + \frac{1}{3} \times 0,5\,(1 - 0,7^n)$$

$$b_n = \frac{1}{3} \times 0,5\,(2 - 2 \times 0,7^n) + \frac{1}{3} \times 0,5\,(2 + 0,7^n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 0,7^n = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,5 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3} \times 0,5 \times 2 + \frac{1}{3} \times 0,5 \times 2 = \frac{2}{3}$$

Sur le long terme la cage A contiendra donc un tiers de la population des souris et la cage B les deux tiers.