Intervalle de fluctuation

De nombreux articles expliquent comment créer un intervalle de fluctuation asymptotique ; je vais plutôt parler dans celui-ci de ce qu'un élève de lycée doit comprendre d'un tel intervalle et comment il doit l'utiliser.
Un intervalle de fluctuation asymptotique sert à **tester une hypothèse**.
Encore faut-il que cette hypothèse soit bien définie dans l'exercice !
On crée l'intervalle si les conditions sont réalisées puis on teste une donnée pour arriver à la conclusion d'acceptation ou de rejet de l'hypothèse.
C'est par exemple le cas lorsqu'il faut déterminer si une machine doit être réglée : on teste régulièrement la production de la machine pour prendre ou non la décision de l'arrêter pour la régler.

1 Quelques explications

1. On doit d'abord bien mettre en évidence l'hypothèse que l'on veut tester.

À ce stade, on ne parle ni d'intervalle, ni d'échantillon : l'hypothèse dépend de ce que propose un vendeur, de ce que doit produire une machine, etc., et elle est forcément donnée dans l'énoncé de l'exercice (disons qu'elle devrait l'être !).

Par exemple, une machine produit des tiges métalliques de longueur 20 cm et on aimerait qu'il n'y ait pas plus de 3 % de tiges hors normes produites par cette machine ; l'hypothèse est ainsi bien définie.

Dans cette première étape, on a donc défini une proportion p (égale à 0,03 dans l'exemple).

2. Ensuite, on construit un intervalle de fluctuation asymptotique centré sur cette proportion p ; dans notre exemple, il s'agit d'un intervalle dans lequel ce serait bien que se trouve un grand pourcentage des longueurs des tiges produites.

Cet intervalle dépend de la proportion p, et de la taille n du futur échantillon que l'on prendra ; il tient compte également d'un risque d'erreur que l'on estime au lycée à 5 % – on évoque aussi un niveau de confiance de 95 %.

Dans cette deuxième étape, côté échantillon, on ne parle que de sa taille et pas encore du résultat de mesures que l'on pourrait faire sur un « échantillon test ».

Pour une proportion de p et une taille d'échantillon de n, les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique sont : $n \geqslant 30$; $np \geqslant 5$; $n(1-p) \geqslant 5$.

Cela exclut en particulier beaucoup de tests effectués dans le milieu médical qui se font souvent sur des échantillons de taille faible ; mais il y a alors d'autres outils.

Sous ces conditions, on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1{,}96 \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

En général, on arrondira la borne gauche de l'intervalle par défaut, et la borne droite par excès ; on obtient donc un intervalle qui contient le véritable intervalle de fluctuation, ce qui est plutôt favorable à l'acceptation de l'hypothèse. On pourrait faire le contraire. Dans ces deux cas, l'intervalle est bien centré sur le nombre p, ce qui ne serait pas le cas si on arrondissait les deux bornes par défaut ou les deux par excès.

Remarque

Le nombre 1,96 que l'on trouve dans cet intervalle est un arrondi du nombre positif α tel que, si la variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, alors on a $P(-\alpha \leqslant X \leqslant \alpha) = 0{,}95$; il faut bien que le niveau de confiance joue un rôle dans cet intervalle !

J'ai toujours trouvé paradoxal que, dans certains sujets de baccalauréat, on demande des intervalles de fluctuation avec des bornes arrondies au dix-millième alors que ce nombre de 1,96 est un arrondi au centième.
En fait, le nombre α vaut à peu près 1,959 963 986, donc on pourrait donner aux élèves sans problème 1,960 ou 1,960 0, ce qui justifierait les arrondis des bornes de l'intervalle avec 4 décimales.

3. Une fois cet intervalle déterminé, on peut alors s'occuper de la fréquence f calculée dans un échantillon « test ». Si la fréquence observée est dans l'intervalle I, on n'a pas de raison de rejeter l'hypothèse testée ; sinon on la rejette.
Tout en gardant à l'esprit que l'on a un risque d'erreur non négligeable de 5 % !

Remarque

On peut (on doit ?), à l'occasion d'exercices de ce type, reparler d'une notion vue en classe de seconde : la « fluctuation d'échantillonnage ». Le calcul de la fréquence dans un échantillon de taille n dépend de l'échantillon choisi et avec un autre échantillon, on aurait certainement une autre fréquence calculée. Cela explique bien que l'on ne peut obtenir de résultat qu'en terme de probabilité.

2 Résumé

1. On établit une hypothèse qui permet de définir une proportion p.

2. On détermine une taille n d'échantillon.

3. On vérifie les trois conditions permettant de construire l'intervalle de fluctuation asymptotique.

4. On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique I en arrondissant les bornes comme demandé dans le texte.

5. On calcule la fréquence f dans l'échantillon de taille n proposé.

6. On établit le diagnostic : si la fréquence f est dans l'intervalle I, on accepte l'hypothèse, sinon on la rejette.

3 Un mauvais exemple

Voici un extrait du sujet de STAV de novembre 2016 en Nouvelle Calédonie (disponible sur le site de l'APMEP ici) :

L'entreprise estime qu'elle produit 1,5 % de sachets présentant un défaut d'emballage.
Une grande surface commande à cette entreprise un lot de 500 sachets. On suppose que la production est suffisamment importante pour que le choix des 500 sachets puisse être assimilé à un prélèvement avec remise.
On rappelle que :
Pour une proportion p connue dans une population, l'intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ ,\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right]$$

Le chef de rayon de la grande surface constate que parmi les 500 sachets livrés par cette entreprise, 2 % de ces sachets présentent un défaut d'emballage.
À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de sachets présentant un défaut d'emballage pour un échantillon de taille 500, expliquer si on peut considérer que la production a bien généré 1,5 % de sachets défectueux. Justifier la réponse.

On pourrait, avec un bonne dose de mauvaise foi, répondre « non » à la question posée : la production a généré dans l'échantillon proposé 2 % de sachets défectueux, ce qui n'est pas égal à 1,5 %. Je serais curieux de savoir comment noterait un correcteur s'il trouvait ça dans une copie d'élève ! Et même pas besoin d'intervalle de fluctuation asymptotique pour répondre à cette question !

Plus sérieusement, on pourrait modifier un peu le texte.
La première phrase pourrait être remplacée par :

> L'entreprise émet l'hypothèse qu'il n'y a pas plus de 1,5 % de sachets présentant un défaut d'emballage.

Et on remplacerait le dernier paragraphe par :

> À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de sachets présentant un défaut d'emballage pour un échantillon de taille 500, expliquer s'il faut accepter l'hypothèse formulée par l'entreprise.
> Justifier la réponse.

Cette rédaction me semble plus claire et plus conforme à la notion d'intervalle de fluctuation asymptotique.

Et comme pour chaque chronique, vos remarques seront les bienvenues.