Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère deux carrés directs ABCD et DCEF de côté 1. Le point I est milieu de [BC] et le point J est milieu de [EFJ (voir figure ci-dessous).

1. On considère la rotation r de centre D qui transforme A en C. Justifier que r (I) = J.

2. Justifier que r est l'unique similitude directe qui transforme A en C et I en J.

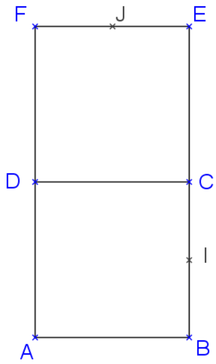
3. On appelle s la similitude directe qui transforme A en I et C en J.

On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

a. Donner les affixes des points A, C, I et J.

b. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + i\right) z + 1 + \frac{1}{2} i$.

c. Montrer que le point D est le centre de s.



Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on considère trois points M, N, P distincts entre eux et distincts du point O. On appelle m, n, p leurs affixes respectives.

On définit la similitude directe s_1 qui transforme O en M et N en P et la similitude directe s_2 qui transforme O en N et M en P.

1. Montrer que l'écriture complexe de s_1 est $z' = \frac{p-m}{n} z + m$.

On admet que l'écriture complexe de s_2 est $z' = \frac{p-n}{m} z + n$

2. *a.* Montrer que si OMPN est un parallélogramme alors s_1 et s_2 sont des translations.

b. On suppose que OMPN n'est pas un parallélogramme. Justifier que s_1 et s_2 ont chacune un centre, et montrer que ces deux points sont confondus.

CORRECTION

Partie A

1. La rotation r de centre D qui transforme A en C a pour angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ donc $\frac{\pi}{2}$, donc F = r(C).

r transforme le carré direct ABCD en le carré direct CB'FD donc en DCEF et r(B) = E.

Le milieu de I de [BC] est transformé par r en le milieu de [EF] donc en J.

2. $A \neq C$ et $I \neq J$ donc il existe une seule similitude directe qui transforme A en C et I en J or $r(A) = C$ et $r(I) = J$ donc r est l'unique similitude directe qui transforme A en C et I en J.

3. *a.* A a pour affixe 0, C a pour affixe 1 + i et I a pour affixe $1 + \frac{1}{2} i$, J a pour affixe $\frac{1}{2} + 2i$

b. L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a z + b$ avec a et b complexes, $a \neq 0$

s est la similitude directe qui transforme A en I et C en J donc $\begin{cases} 1 + \frac{1}{2} i = a \times 0 + b \\ \frac{1}{2} + 2i = a(1+i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} + 2i = a(1+i) + 1 + \frac{1}{2} i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ a(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ a = \frac{-1+3i}{2(1+i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ a = \frac{(-1+3i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ a = \frac{-1+i+3i+3}{2 \times 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ a = \frac{2+4i}{2 \times 2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = 1 + \frac{1}{2} i \\ a = \frac{1}{2} + i \end{cases}$.

L’écriture complexe de s est $z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right) z + 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

c. D a pour affixe i, l’image de D est le point d’affixe $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)\mathrm{i} + 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ soit i, D est invariant par s, or une similitude directe admet un seul point invariant qui est le centre de la similitude donc D est le centre de s.

Partie B

1. L’écriture complexe d’une similitude directe est de la forme $z' = a\,z + b$ avec a et b complexes, $a \neq 0$.

s_1 transforme O en M et N en P donc $\begin{cases} m = 0 \times a + b \\ p = a\,n + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = m \\ p = a\,n + m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = m \\ a = \dfrac{p-m}{n} \end{cases}$

L’écriture complexe de s_1 est $z' = \dfrac{p-m}{n} z + m$

2. ***a.*** si OMPN est un parallélogramme alors $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ donc $n = p - m$ donc $\dfrac{p-m}{n} = 1$,

l’écriture complexe de s_1 est $z' = z + m$ s_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

,

si OMPN est un parallélogramme alors $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{NP}}$ donc $m = p - n$ donc $\dfrac{p-n}{m} = 1$, l’écriture complexe de s_2 est $z' = z + n$

s_2 est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$

b. O M P N n’est pas un parallélogramme donc $\dfrac{p-m}{n} \neq 1$ et $\dfrac{p-n}{m} \neq 1$, donc s_1 et s_2 ne sont pas des translations donc ont chacune un centre.

Le centre de s_1 est le point invariant par s_1, son affixe est solution de $z = \dfrac{p-m}{n} z + m$

soit $n\,z = (p - m)\,z + n\,m$ donc $z\,(n + m - p) = n\,m$

comme $\dfrac{p-m}{n} \neq 1$ alors $(n + m - p) \neq 1$ et $z = \dfrac{n\,m}{n + m - p}$.

Le centre de s_1 est le point invariant par s_2, son affixe est solution de $z = \dfrac{p-n}{m} z + n$ soit $m\,z = (p - n)\,z + n\,m$

donc $z\,(n + m - p) = n\,m$ donc $z = \dfrac{n\,m}{n + m - p}$. s_1 et s_2 ont le même centre.