Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.

Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 *: «On peut choisir la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. »

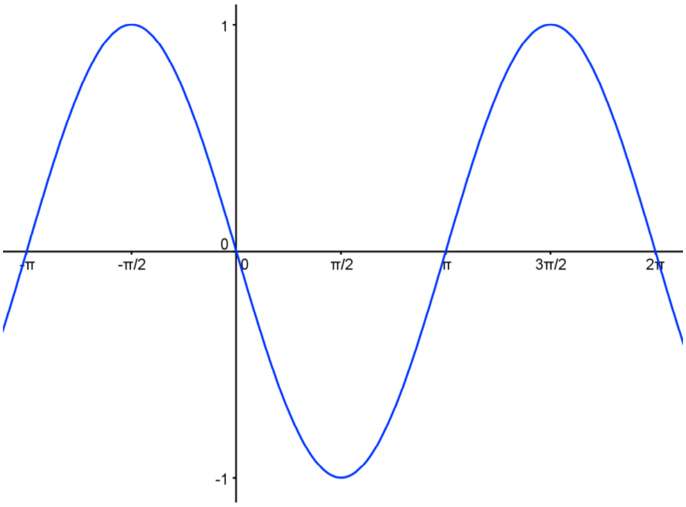
2. **Énoncé 2 :** Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{3}}$.

Proposition 2 *: « Les points O,* M_1 *et* M_{20} *sont alignés. »*

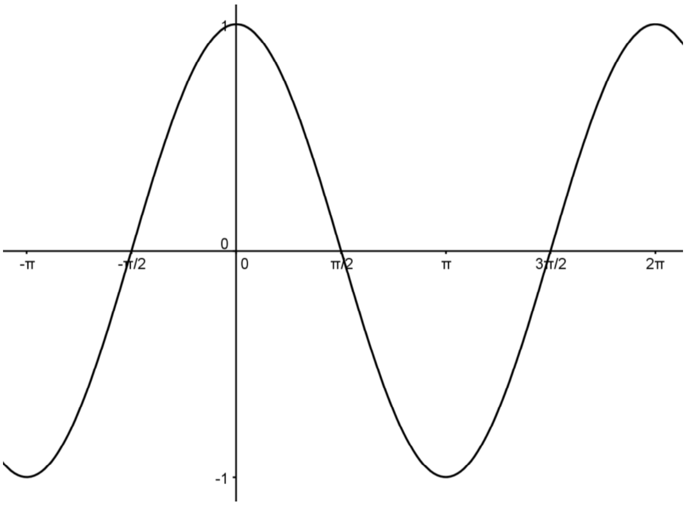
3. **Énoncé 3 :** On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition 3 *: « La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de* f *».*

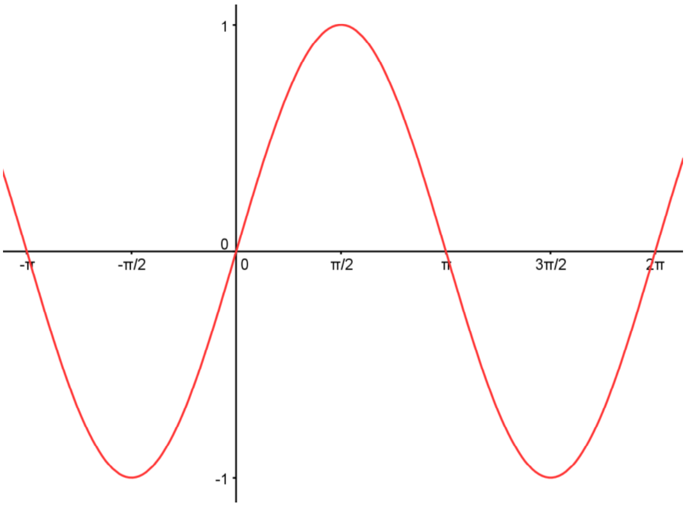
Courbe 1



Courbe 2



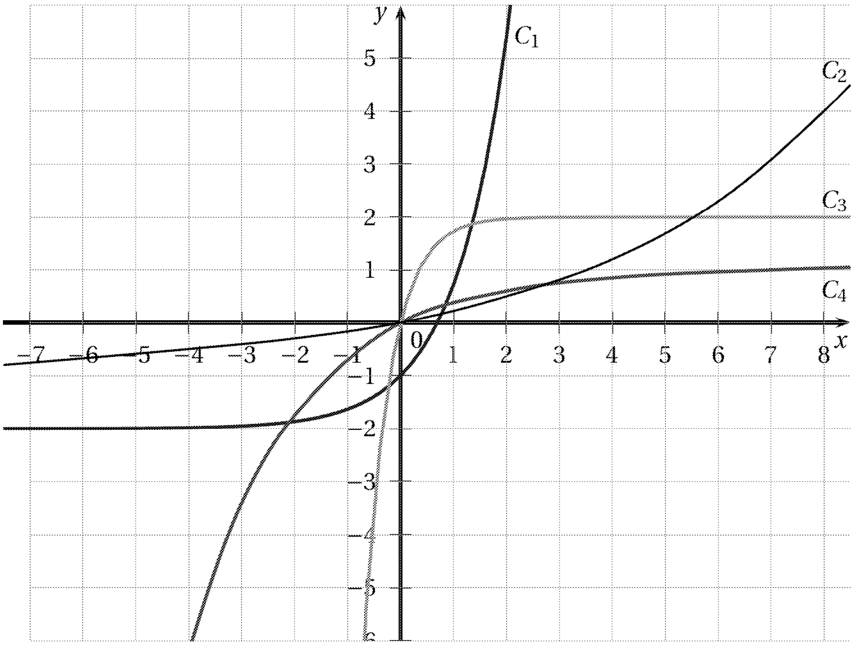
Courbe 3



4. **Énoncé 4 :** On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point A(0 ; 0 ; 3) et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

Proposition 4 *: « La sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants. »*

5. **Énoncé 5 :** On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.
Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ *est la courbe* C_4. »



CORRECTION

1. **VRAI**

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc si $a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$, la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \sin\frac{\pi}{4}$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **FAUX**

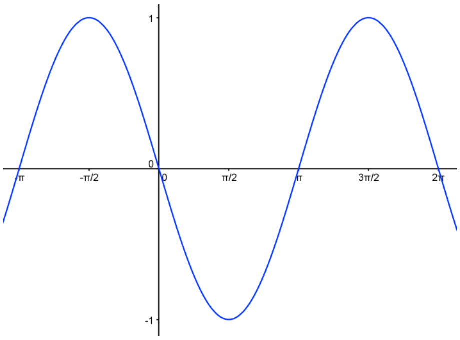
M_1 est le point d'affixe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, M_{20} est le point d'affixe $e^{\frac{2\times 20 i\pi}{3}} = e^{\frac{40 i\pi}{3}} = e^{14 i\pi}\, e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ $(40 = 42 - 2 = 3 \times 14 - 2)$

donc M_{20} est le point d'affixe $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ donc M_{20} et M_1 sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

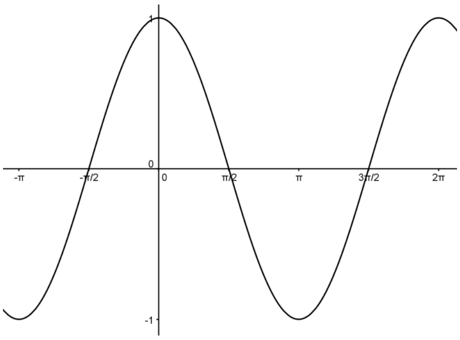
3. **FAUX**

La fonction F s'annule en 0 donc sa courbe représentative est soit la courbe 1 soit la courbe 3, de plus F étant une primitive de f alors $F' = f$
Si la courbe 3 représente la fonction f, alors la courbe 1 représente F.
f est alors positive sur $[0 ; \pi]$, or $f = F'$ donc F est croissante sur $[0 ; \pi]$ ce qui n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe 1 donc la courbe 3 représente F, F est alors croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc sa dérivée f est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, donc la courbe représentative de f est la courbe 2 donc par élimination la courbe représentative de f' est la courbe 1.

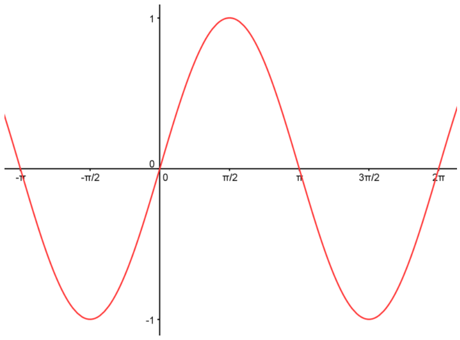
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



4. **VRAI**

La distance du point A au plan P est égale à $d = \frac{|2\times 0 - 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$