Centres étrangers juin 2018

Les parties A et B sont indépendantes

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 *g* et 1 200 *g*. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».

Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.

Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [850 ; x], où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_B qui suit une loi normale de moyenne 1 050 et d'écart-type inconnu σ.

Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.

2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes.

Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_B. En donner la valeur arrondie à l'unité.

3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes. Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Partie B

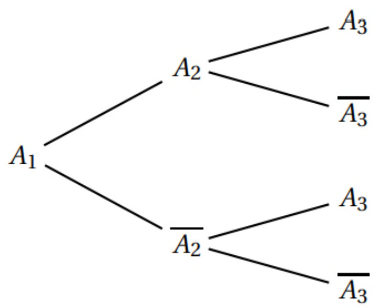
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ». On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. *a.* Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.



b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?

Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5\,p_n + 0,4$.

3. *a.* Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0,8$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

CORRECTION

Partie A

1. La masse des melons du maraîcher A est une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [850 ; x], où x est un nombre réel supérieur à 1 200.

$P(900 \leq M_A \leq 1200) = \dfrac{1200 - 900}{x - 850}$ donc $\dfrac{300}{x-850} = 0,75$ donc $300 = (x - 850)\, 0,75$ soit $0,75\,x = 850 \times 0,75 + 300 = 937,5$

$x = \dfrac{937,5}{0,75} = 1250$

2. $P(900 \leq M_B \leq 1200) = 0,85$

Soit $T = \dfrac{M_B - 1\,050}{\sigma}$, $P\left(\dfrac{900 - 1\,050}{\sigma} \leq T \leq \dfrac{1\,2000 - 1\,050}{\sigma}\right) = P\left(-\dfrac{150}{\sigma} \leq T \leq \dfrac{150}{\sigma}\right) = 0,85$

T suit une loi normale centrée réduite donc $\dfrac{150}{\sigma} \approx 1,4395$ donc $\sigma = \dfrac{150}{1,4395}$ soit $\sigma \approx 104$ arrondi à l'unité.

3. Soit $n = 400$ et $p = 0,8$, $n > 25$ et $n\,p = 320$ et $n\,(1 - p) = 80$ donc $n > 30$; $n\,p > 5$ et $n\,(1 - p) > 5$

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation au risque 5 % sont réunies.

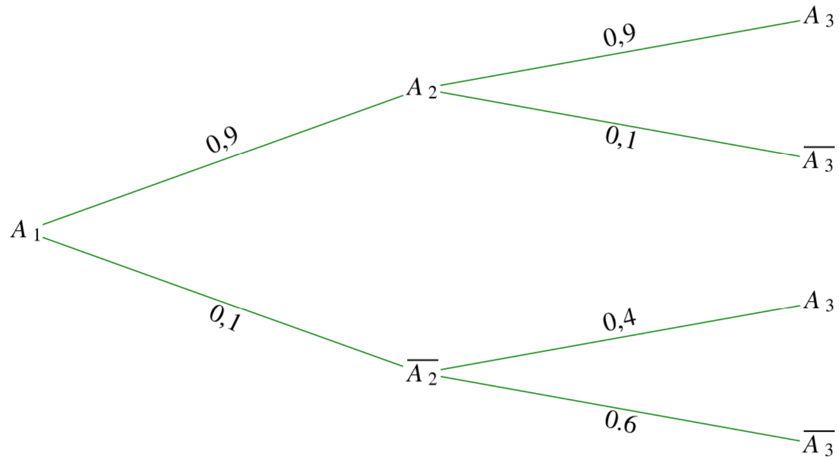
$$I = \left[0,8 - 1,96\,\frac{\sqrt{400 \times 0,8 \times 0,2}}{400}\,;\, 0,8 + 1,96\,\frac{\sqrt{400 \times 0,8 \times 0,2}}{400}\right]$$ soit $I \approx [0,7608 ; 0,8392]$

La proportion de melons conformes dans l'échantillon est $f = \dfrac{294}{400}$ soit $f = 0,735$

$0,735 \in I$ donc le détaillant a raison de douter de l'affirmation du maraîcher C avec un risque de 5 %.

Partie B

1. *a.*



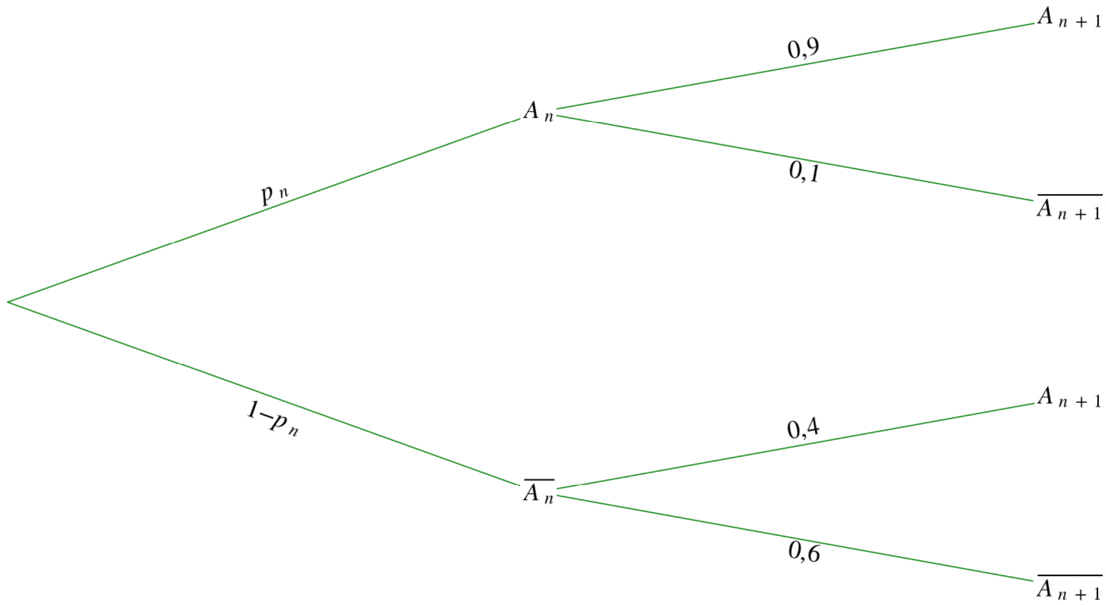
b. $p(A_3) = p\left(A_2 \cap A_3\right) + p\left(\overline{A_2} \cap A_3\right)$

$p(A_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}85$.

c. $P_{A_3}(A_2) = \dfrac{p\left(A_2 \cap A_3\right)}{p\left(A_3\right)} = \dfrac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}85}$

soit 0,95

2.



$p(A_{n+1}) = p\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + p\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right)$ donc $p_{n+1} = 0{,}9\, p_n + 0{,}4\,(1 - p_n)$.

Pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$.

3. *a.* **Initialisation :** $p_1 = 1$ donc $p_1 \geq 0{,}8$. La propriété est initialisée

Hérédité : Montrons pour tout entier $n \geq 1$, que si $p_n \geq 0{,}8$ alors $p_{n+1} \geq 0{,}8$

Pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$ et $p_n \geq 0{,}8$ donc $p_{n+1} \geq 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4$ soit $p_{n+1} \geq 0{,}8$.

La propriété est héréditaire

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0{,}8$.

b. $p_{n+1} - p_n = 0{,}5\, p_n + 0{,}4 - p_n = -0{,}5\, p_n + 0{,}4$

$p_n > 0{,}8$ donc $0{,}5\, p_n > 0{,}4$ donc $-0{,}5\, p_n + 0{,}4 < 0$ soit $p_{n+1} - p_n < 0$ donc la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est décroissante, minorée par 0 (une probabilité appartient à [0 ; 1]) donc la suite (p_n) est convergente.

4. Pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0{,}8$ donc $p_n = v_n + 0{,}8$

a. Pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$ donc $v_{n+1} + 0{,}8 = 0{,}5\,(v_n + 0{,}8) + 0{,}4$ soit $v_{n+1} + 0{,}8 = 0{,}5\, v_n + 0{,}4 + 0{,}4$ donc $v_{n+1} = 0{,}5\, v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ et de raison 0,5

b. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

$p_n = v_n + 0{,}8$ donc, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

c. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8$.