La Réunion juin 2007

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3\,\mathrm{i}$ et $c = 2\,\mathrm{i}$.

1. *a*. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AC})$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ et $f = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,

b. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire k i où k est un nombre réel à déterminer.

Interpréter géométriquement ce résultat.

On admet que, de façon analogue, $\dfrac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire k' i où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

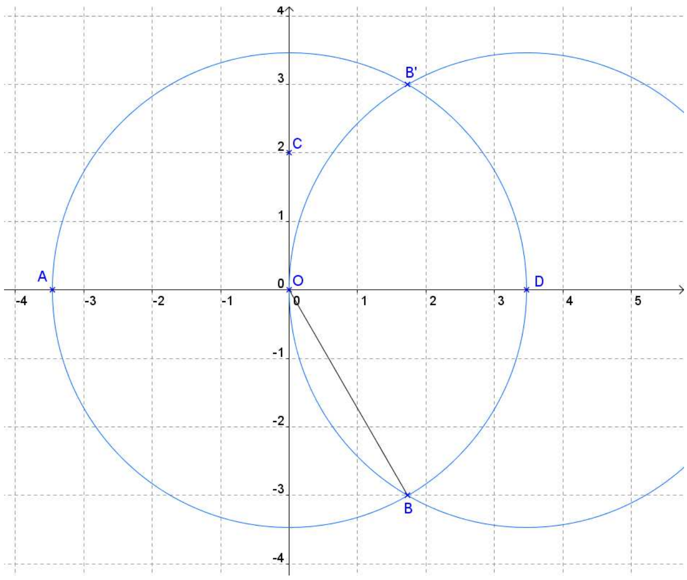
c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est $z \to \dfrac{1}{2}\bar{z} - \sqrt{3}$.

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point S(H) sur la figure.

CORRECTION



1. *a*. $b = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

1. *b*. $|b| = 2\sqrt{3} = OA$ donc B appartient au cercle de centre O de rayon OA, ce cercle coupe l'axe des réels en A et D

$\arg b = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

Il suffisait de construire le cercle C de centre D de rayon OD qui coupe C en deux points B et B'.

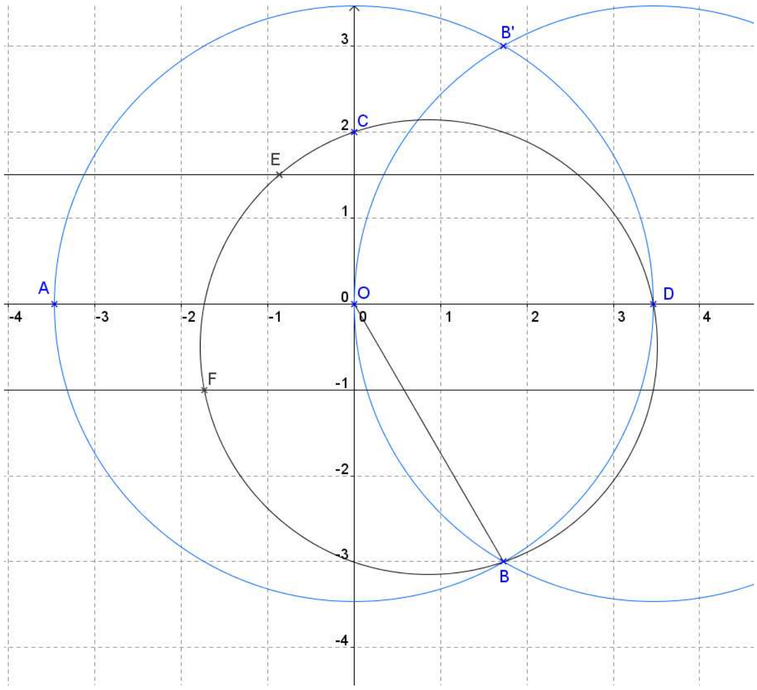
L'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ a pour mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.

c. $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$ or $b - a = 3\sqrt{3} - 3\,\mathrm{i} = 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc $\arg(b-a) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{6} + + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = \arg(c-a)$ or $c - a = 2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc $\arg(c-a) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)



2. *a*. $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2\sqrt{3} ; 2)$ donc $3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires donc les points A, E et C sont alignés,

$\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées $(\sqrt{3} ; -1)$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées$(3\sqrt{3} ; -3)$ donc $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AF}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires donc les points A, B et F sont alignés.

2. *b*. $\dfrac{e-c}{e-b} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}}{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{3\sqrt{3}\,(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{i}$

donc $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) = \dfrac{\pi}{2} + + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$

Le triangle EBC est rectangle en E donc E appartient au cercle de diamètre [BC]

De même le triangle FBC est rectangle en F donc F appartient au cercle de diamètre [BC]

3. $a' = \dfrac{1}{2} \times (-2\sqrt{3}) - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ donc A’ = A

$b' = \dfrac{1}{2} \times (\sqrt{3} + 3\,\mathrm{i}) - \sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i} = e$ donc B’ = E

$c' = \dfrac{1}{2} \times (-2\,\mathrm{i}) - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} = f$ donc C’ = F

4. L’image par une similitude d’une droite est une droite donc l’image de (BE) par S est la droite (B’E’) = (EE’)
L’image de (CF) par S est (FF’)
Une similitude conserve l’orthogonalité. Le triangle EBC est rectangle en E donc (BE) est perpendiculaire à (EC) donc à (AC)
La droite d = (EE’) est la perpendiculaire en s(B) = E à s(AC) = (AF)
Le triangle FBC est rectangle en F donc (CF) est perpendiculaire à (FB) donc à (AB)
La droite d ’ = (FF’) est la perpendiculaire en s(C) = F à s(AC) = (AF)
H est le point d’intersection de (BE) et de (CF) donc H’ est le point d’intersection de d et de d ’