Polynésie Juin 2003

Dans tout l'exercice, le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Les constructions seront faites sur papier millimétré.

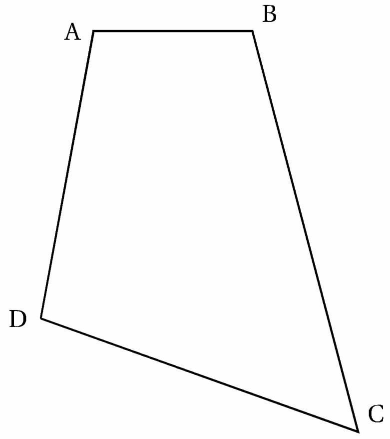
1. ***a.*** Le point E a pour affixe $z_E = 3 + i$ et le point F a pour affixe $z_F = 1 + 3\,i$. Placer dans P les points E et F.

b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $(\overrightarrow{HF}\,,\overrightarrow{HE}\,) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

c. On désigne par ZH l'affixe de H. Montrer que $\left|\frac{3+i-Z_H}{1+3\,i-Z_H}\right| = 1$ et que $\arg\left(\frac{3+i-Z_H}{1+3\,i-Z_H}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

En déduire que $z_H = 3 + 3\,i$.

2. A, B, C et D sont quatre points du plan P .



a. Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{BIA}$, $\widehat{AJD}$, $\widehat{DKC}$ et $\widehat{CLB}$.

b. Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments [IK] et [LJ].

3. ***a.*** On désigne par a, b et z_I les affixes respectives des points A, B et I.

Montrer que $\left|\frac{b-z_I}{a-z_I}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{b-z_I}{a-z_I}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\,\pi]$. En déduire que $z_I = \frac{i\,a-b}{i-1}$.

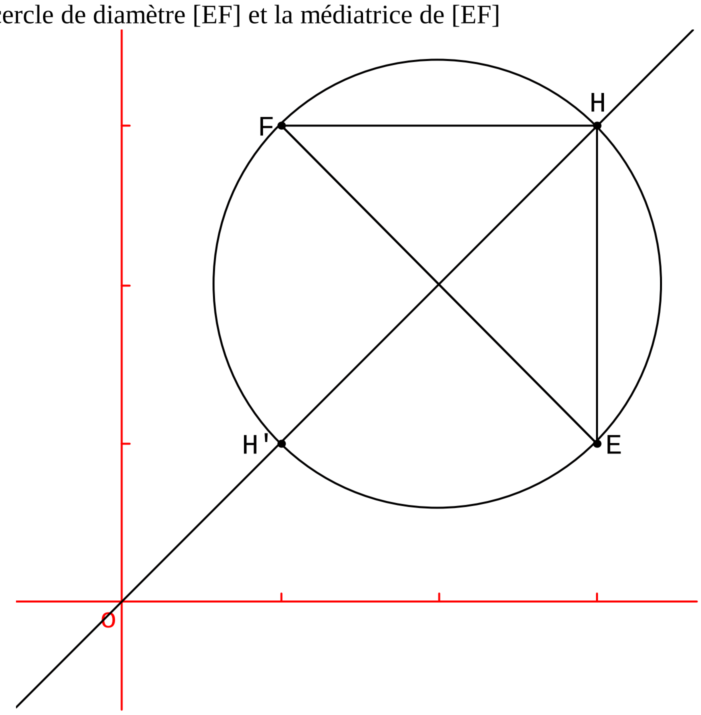
b. Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_L, exprimer sans démonstration z_L en fonction de b et c.

c. Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_K, exprimer de même z_K en fonction de c et d. Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_J exprimer de même z_J en fonction de a et d.

d. Montrer que $z_L - z_J = i\,(z_K - z_I)$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires et que JL = KI.

CORRECTION

1. ***a. b.*** Il suffit de construire le cercle de diamètre [EF] et la médiatrice de [EF]



Soit H et H' les points d'intersection du cercle et de la droite ainsi tracés. Le triangle EHF est rectangle isocèle direct.

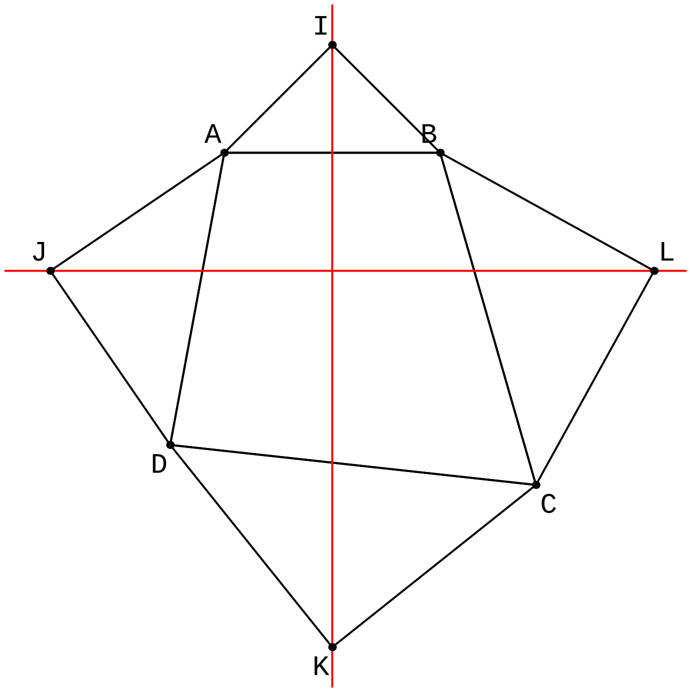
1. *c*. EH = FH donc $|3+\mathrm{i}-Z_H| = |1+3\mathrm{i}-Z_H|$ soit $\left|\dfrac{3+\mathrm{i}-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H}\right| = 1$

$(\overrightarrow{HF};\overrightarrow{HE}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $\arg\left(\dfrac{3+\mathrm{i}-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$\dfrac{3+\mathrm{i}-Z_H}{1+3\mathrm{i}-Z_H} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ donc $3+\mathrm{i}-Z_H = \mathrm{i}(1+3\mathrm{i}-Z_H)$

$3+\mathrm{i}-Z_H = \mathrm{i}-3-\mathrm{i}Z_H$ soit $(1-\mathrm{i})Z_H = 3+\mathrm{i}-\mathrm{i}+3 = 6$ soit $Z_H = \dfrac{6}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{6(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$Z_H = 3(1+\mathrm{i})$ ou $Z_H = 3+3\mathrm{i}$.



2. *a*. *b*. Apparemment (IK) et (JL) sont perpendiculaires et IK = LJ

3. *a*. Le triangle ABI est rectangle isocèle direct donc de même qu'à la question 1. *c*.

$\left|\dfrac{b-z_I}{a-z_I}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_I}{a-z_I}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). donc $\dfrac{b-z_I}{a-z_I} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ soit $b - z_I = \mathrm{i}\,a - \mathrm{i}\,z_I$

donc $(\mathrm{i}-1)z_I = \mathrm{i}\,a - b$ soit $z_I = \dfrac{\mathrm{i}\,a-b}{\mathrm{i}-1}$.

***b*.** Le triangle BCL est rectangle isocèle direct donc $\left|\dfrac{c-z_L}{b-z_L}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{c-z_L}{b-z_L}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) soit $z_L = \dfrac{\mathrm{i}\,b-c}{\mathrm{i}-1}$.

***c*.** Le triangle CDK est rectangle isocèle direct donc $\left|\dfrac{d-z_K}{c-z_K}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{c-z_K}{b-z_K}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) soit $z_K = \dfrac{\mathrm{i}\,c-d}{\mathrm{i}-1}$.

***d*.** Le triangle DAJ est rectangle isocèle direct donc $\left|\dfrac{a-z_J}{d-z_J}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{a-z_J}{d-z_J}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) soit $z_J = \dfrac{\mathrm{i}\,d-a}{\mathrm{i}-1}$.

$z_L - z_J = \dfrac{\mathrm{i}\,b-c}{\mathrm{i}-1} - \dfrac{\mathrm{i}\,d-a}{\mathrm{i}-1} = \dfrac{\mathrm{i}(b-d)-c+a}{\mathrm{i}-1}$

$z_K - z_I = \dfrac{\mathrm{i}\,c-d}{\mathrm{i}-1} - \dfrac{\mathrm{i}\,a-b}{\mathrm{i}-1} = \dfrac{\mathrm{i}(c-a)-d+b}{\mathrm{i}-1}$ donc $\mathrm{i}(z_K - z_I) = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{i}(c-a)-d+b}{\mathrm{i}-1} = \dfrac{-(c-a)+\mathrm{i}(b-d)}{\mathrm{i}-1}$

donc $z_L - z_J = \mathrm{i}(z_K - z_I)$ soit $\dfrac{z_L-z_J}{z_K-z_I} = \mathrm{i}$ donc $\arg\dfrac{z_L-z_J}{z_K-z_I} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JL}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires.

$z_L - z_J = \mathrm{i}(z_K - z_I)$ donc $|z_L - z_J| = |\mathrm{i}(z_K - z_I)| = |z_K - z_I|$ donc JL = KI