**Polynésie juin 2006**
Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.
**Proposition 1 :** « pour tout entier naturel $n$, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».
**Proposition 2 :** « Si un entier relatif $x$ est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ (modulo 6) alors $x \equiv 0$ (modulo 3) ».
**Proposition 3 :** « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k ; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».
**Proposition 4 :** « il existe un seul couple $(a ; b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a , b) - \text{PGCD}(a , b) = 1$ ».
Deux entiers naturels $M$ et $N$ sont tels que $M$ a pour écriture $abc$ en base dix et $N$ a pour écriture $bca$ en base dix.
**Proposition 5 :** « Si l'entier $M$ est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

## CORRECTION

**Proposition 1 : VRAIE**
$2^2 = 4$ donc $2^2 \equiv 1$ modulo 3 donc pour tout entier naturel $n$, $(2^2)^n \equiv 1$ modulo 3
Pour tout entier naturel $n$, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$.

**Proposition 2 : FAUSSE**
Un entier naturel a pour reste dans la division par 6, 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ou 5

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| modulo 6, $n$ est congru à | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| modulo 6, $n^2$ est congru à | 0 | 1 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| modulo 6, $n^2 + n$ est congru à | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| modulo 3, $n$ est congru à | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |

Si un entier relatif $x$ est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ (modulo 6) alors $x \equiv 0$ ou $x \equiv 2$ (modulo 3)

On aurait pu se contenter d'un contre exemple :
Si $n = 2$ alors $n^2 + n = 6$ donc $n^2 + n \equiv 0$ (modulo 6) et $n$ n'est pas congru à 0 modulo 3

**Proposition 3 : FAUSSE**
$\begin{cases} 12x - 5y = 3 \\ 12 \times 4 - 5 \times 9 = 3 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $12(x - 4) - 5(y - 9) = 0$
$12(x - 4) = 5(y - 9)$ donc 12 divise $5(y - 9)$
12 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 12 divise $y - 9$
Il existe un entier $k$ tel que $y - 9 = 12k$ donc en remplaçant dans $12(x - 4) = 5(y - 9)$ alors $x - 4 = 5k$
donc $x = 5k + 12$ et $y = 12k + 9$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solutions de (1).

Vérification : $x = 5k + 4$ et $y = 12k + 5$ alors $12x - 5y = 12(5k + 4) - 5(12k + 9) = 3$
Les solutions de (1) sont les couples $(5k + 4 ; 12k + 5)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions fournies par l'énoncé correspondent aux valeurs paires du paramètre

On aurait pu se contenter d'un contre exemple :
si $x = -1$ et $y = -3$ alors $12x - 5y = -12 + 15 = 3$ et $-1$ n'est pas de la forme $10k + 4$

**Proposition 4 : VRAIE**
Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels et $d = \text{PGCD}(a , b)$,
Il existe deux entiers naturels $a'$ et $b'$ premiers entre eux tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$
$a < b$ et $a$ et $b$ entiers naturels donc $a' < b'$
$\text{PPCM}(a , b) = d\,a'\,b'$
$\text{PPCM}(a , b) - \text{PGCD}(a , b) = 1 \Leftrightarrow d\,a'\,b' - d = 1 \Leftrightarrow d(a'\,b' - 1) = 1$ donc $d$ divise 1 or $d \in \mathbb{N}$ donc $d = 1$
donc $a' = a$ et $b' = b$ et $a\,b - 1 = 1$ donc $a\,b = 2$
$a$ divise 2 et $a \in \mathbb{N}$ donc $a = 1$ ou $a = 2$
si $a = 1$ alors $b = 2$ et si $a = 2$ alors $b = 1$ or $a < b$ donc il existe un seul couple $(a ; b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a , b) - \text{PGCD}(a , b) = 1$ le couple $(1 ; 2)$.

**Proposition 5 : VRAIE**
$M = \overleftrightarrow{abc}^{10} = c + 10b + 100a$
$N = \overleftrightarrow{bca}^{10} = a + 10c + 100b$ donc $M - N = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c)$
Si l'entier $M$ est divisible par 27 alors il existe $k$ tel que $c + 10b + 100a = 27k$
donc $c + 10b = 27k - 100a$ donc en remplaçant dans $M - N$ :
$M - \mathbb{N} = 9[11a - (27k - 100a)] = 9(111a - 27k) = 27(37a - 9k)$
$37a - 9k \in \mathbb{N}$ donc l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27.