Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

$$\Pi_1 \ : x - 6\,y + z = 0\ ;$$

$$\Pi_2 \ : 4\,X - 2\,Y + Z = 2\ ;$$

$$\Pi_3 \ : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\,\mu \end{cases} \ , \lambda \text{ et } \mu \text{ étant des réels quelconques.}$$

Trouver une équation du plan Π qui est perpendiculaire à Π_1 et qui contient la droite qui est l'intersection des deux plans Π_2 et Π_3.

CORRECTION

Le travail se fait en plusieurs étapes :

1. déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ intersetion des deux plans Π_2 et Π_3.
2. déterminer le point d'intersetion de Δ et de Π_1.
3. déterminer une représentation paramétrique de Π
4. déterminer une équation cartésienne de Π

1. Déterminons deux points de la droite Δ intersection des deux plans Π_2 et Π_3.

$\Pi_2 \ : 4\,x - 2\,y + z = 2$; $\Pi_3 \ : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\,\mu \end{cases}$ donc un point de Δ de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifie les deux conditions donc en remplaçant : $4\,(2 + \lambda) - 2\,(2 + \lambda + \mu) + 1 + \lambda + 2\,\mu = 2$ soit $8 + 4\,\lambda - 4 - 2\,\lambda - 2\,\mu + 1 + \lambda + 2\,\mu = 2$ soit $5 + 3\,\lambda = 2$

$\lambda = -\,1$ donc $x = 2 - 1 = 1$; $y = 1 + \mu$ et $z = 2\,\mu$

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 + \mu \\ z = \ 2\,\mu \end{cases}$ avec μ réel quelconque.

2. Cette droite coupe le plan Π_1 en un point A donc les coordonnées vérifient : $x - 6\,y + z = 0$ et $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 + \mu \\ z = \ 2\,\mu \end{cases}$ avec μ réel quelconque.

$1 - 6\,(\,1 + \mu) + 2\,\mu = 0$ soit $1 - 6 - 6\,\mu + 2\,\mu = 0$ donc $4\,\mu = 5$ et $\mu = -\,\dfrac{5}{4}$

A a pour coordonnées $\left(1\,; -\dfrac{1}{4}\,; -\dfrac{5}{2}\right)$.

3. Le plan Π est perpendiculaire à Π_1 donc contient le vecteur normal à Π_1 $\vec{n}\ (1\ ;-6\ ;1)$

Le plan Π contient la droite Δ donc contient le vecteur directeur de cette droite $\vec{u}\ (0\ ;1\ ;2)$.

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc $(A\ ;\ \vec{n}\,,\vec{u}\,)$ est un repère du plan Π.

Il faut donc déterminer une équation du plan Π passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{n}\ (1\ ;-6\ ;1)$ et $\vec{u}\ (0\ ;1\ ;2)$

Une représentation paramétrique de ce plan est donc $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\dfrac{1}{4} - 6\,\lambda + \mu \\ z = -\dfrac{5}{2} + \lambda + 2\,\mu \end{cases}$, λ et μ étant des réels quelconques.

4. Eliminons μ entre les deux dernières lignes : $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4} - 6\,\lambda + \mu \\ z = -\dfrac{5}{2} + \lambda + 2\,\mu \end{cases}$ donc $2\,y - z = -\dfrac{1}{2} - 12\,\lambda + 2\,\mu + \dfrac{5}{2} - \lambda - 2\,\mu$

soit $2\,y - z = 2 - 13\,\lambda$

Eliminons λ entre les deux lignes : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ 2\,y - z = 2 - 13\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in$ R.

$13\,x + 2\,y - z = 13 + 13\,\lambda + 2 - 13\,\lambda$ soit $13\,x + 2\,y - z = 15$

Une équation cartésienne de Π est $13\,x + 2\,y - z = 15$